

Adott egy 1 kg tömegű test és adott a következő erő:

$$\mathbf{F} = (y^2 + y) \mathbf{i} + (x + p \cdot xy) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \quad [\text{N}], \quad \text{ahol } p \text{ egy paraméter.}$$

a) Számoljuk ki az \mathbf{F} erő által végzett munkát, miközben a test a $P_0(2;-1;5)$ pontból a $P_1(4;0;2)$ pontba mozog a pontokat összekötő egyenes mentén $p = 1$ esetén!

b) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy \mathbf{F} konzervatív legyen, írjuk fel a potenciálfüggvényt, és számoljuk ki ismét az erő által végzett munkát a fenti pályára!

MO.

a) $\mathbf{F} = (y^2 + y) \mathbf{i} + (x + xy) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \quad [\text{N}]$

P_0 -ban $t_0 = 0$ és P_1 -ben $t_1 = 1$ választással

$$x(t) = 2 + 2t; \quad y(t) = t - 1; \quad z(t) = 5 - 3t$$

Ezekből $dx = 2 dt$; $dy = dt$; $dz = -3 dt$.

$$\begin{aligned} W_{P_0 P_1} &= \int_{(2,-1,5)}^{(4,0,2)} \{ [y^2 + y] \cdot dx + [x + x \cdot y] \cdot dy + [2] \cdot dz \} = \\ &= \int_0^1 \left\{ [y(t)^2 + y(t)] \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) + [x(t) + x(t) \cdot y(t)] \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right) + [2] \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) \right\} dt = \\ &= \int_0^1 \{ [(t-1)^2 + (t-1)] \cdot 2 + [(2+2t) + (2+2t) \cdot (t-1)] \cdot 1 + [2 \cdot (-3)] \} dt = \\ &= \int_0^1 \{ 4t^2 - 6 \} dt = \left[\frac{4}{3}t^3 - 6t \right]_0^1 = -\frac{14}{3} \text{ J.} \end{aligned}$$

b) $\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + y & x + pxy & 2 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + ((1 + py) - (2y + 1))\mathbf{k}$

$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, ha $p = 2$.

Mivel $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} = -F_x = -(y^2 + y)$, $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} = -F_y = -(x + 2xy)$ és $\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} = -F_z = -2$,

a potenciálfüggvény $E_{\text{pot}} = -(xy + xy^2 + 2z)$.

$$W_{P_0, P_1} = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(P_0) - E_{\text{pot}}(P_1) = E_{\text{pot}}(2;-1;5) - E_{\text{pot}}(4;0;2) = -10 - (-4) = -6 \text{ J.}$$