

Egy 15 cm hosszú, 15 N/m rugóállandójú rugó egyik végére erősítünk egy 15 dkg-os testet, a másik végét a plafonhoz rögzítjük. A testet úgy engedjük el, hogy az a felfüggesztési pontnál 19 cm-rel van lejjebb, és 0,8 m/s kezdősebességet adunk neki felfelé.

- a) Írjuk fel a testnek a felfüggesztési ponttól mért távolságát az idő függvényében!
 b) Mekkora és milyen irányú lesz 9 s múlva a testre ható rugóerő, ill. eredő erő?

Megoldás:

$$\text{a) } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15}{0,15}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$mg = kx_{es} \rightarrow x_{es} = mg/k = 0,15 \cdot 10/15 = 0,10 \text{ m}$$

Vegyük fel az y tengelyt úgy, hogy a rezgés egyensúlyi helyzeténél legyen $y = 0$, azaz $l_0 + x_{es} = 0,15 + 0,10 = 0,25$ m-re a felfüggesztési ponttól (és mutasson lefelé).

Mivel a test kiindulási távolsága a felfüggesztési ponttól 0,19 m, ezért

$$y_0 = 0,19 - 0,25 = -0,06 \text{ m}$$

(y_0 negatív, mivel a rugó induláskor az egyensúlyi helyzethez képest össze van nyomódva)

A kezdősebesség negatív, mivel felfelé (az y tengelyen negatív irányba, az összenyomódás irányába) mutat: $v_0 = -0,8$ m/s.

Tehát

$$y_0 = -0,06 = A \cos \varphi_0$$

$$v_0 = -0,8 = -A\omega \sin \varphi_0 = -10A \sin \varphi_0$$

$$\text{Ezekből } A = \sqrt{0,06^2 + \left(\frac{0,8}{10}\right)^2} = 0,10 \text{ m}$$

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{0,8/10}{-0,06} = -4/3 \rightarrow \varphi_0 = -0,9273 + k\pi$$

$$\varphi_0 = -0,9273 \text{ választással } y(0) = 0,1 \cdot \cos(-0,9273) = 0,06 \text{ pozitív lenne és}$$

$$v(0) = -10 \cdot 0,1 \cdot \sin(-0,9273) = 0,8 \text{ is pozitív lenne,}$$

ezért $\varphi_0 = -0,9273 + \pi = 2,2143$, amivel előjelhelyesen visszkapjuk a kezdeti feltételeket.

$$\text{Tehát } y(t) = 0,1 \cdot \cos(10t + 2,2143) \text{ [m],}$$

a felfüggesztési ponttól pedig

$$X(t) = l_0 + x_{es} + y(t) = 0,25 + 0,10 \cdot \cos(10t + 2,2143) \text{ [m].}$$

$$\text{b) } X(9) = 0,25 + 0,10 \cdot \cos(10 \cdot 9 + 2,2143) \approx 0,2054 \text{ m.}$$

A rugó megnyúlása $t = 9$ s-nál $\Delta l = X(9) - l_0 = 0,0554$ m,

a rugóerő $F_r = -k \cdot \Delta l = -15 \cdot 0,0554 \approx -0,8305$ N, felfelé hat a testre (a rugó meg van nyúlva!).

A nehézségi erő $mg = 1,5$ N;

az eredő erő $F_e = 1,5 - 0,8305 = 0,6695$ N lefelé.

(Az eredő erő a testet az egyensúlyi helyzet felé gyorsítja, ami lejjebb van.)