

Jövő héten meglátogatja városunkat Diktatória elnöke. Az óriási biztonsági intézkedések ellenére Titi, Tita, Tati és Tata megtudták, hogy az Elnök feje pontban déli 12:00:00-kor hol lesz, és elhatározták, hogy a fejébe juttatják a Világbéke Gondolatát (továbbiakban: VBG), mindenki egy-egy 5 dkg-os csomag formájában. Abban a koordináta-rendszerben, amelyet felvettek maguknak (a kedvenc sörcsapjukhoz rögzítve), az Elnök fejének helyvektora

$$\mathbf{r}_E = 28 \mathbf{i} + 333 \mathbf{j} + 1,5 \mathbf{k} \quad (\text{m}) \quad \text{lesz abban a pillanatban.}$$

A VBG akkor jut be az Elnök fejébe, ha a fejéhez érkeve legalább $v_{\min} = 15 \text{ m/s}$ a sebessége. Mindenki más módszert talált ki, hogy egy adag VBG-t az Elnök fejéhez juttasson. Számoljuk ki, hogy kinek/kiknek sikerül a terve!

1. Titi beprogramozta a VBG-t, hogy a sebessége

$$\mathbf{v} = B \cdot (1 - \cos(C \cdot t)) \mathbf{i} + (D \cdot t^2 + E) \mathbf{j} + F \cdot e^{-t/H} \mathbf{k} \quad (\text{m/s}) \quad \text{legyen.}$$

$B = 0,27 \text{ m/s}$; $C = 0,3 \text{ s}^{-1}$; $D = 0,06 \text{ m/s}^3$; $E = 1,3 \text{ m/s}$; $F = -2,4 \text{ m/s}$; $H = 120 \text{ s}$.

A $t = 0$ időpont 1 perccel 12 előtt van, amikor a VBG-t elindítja.

- a) Honnan kell elindítania, hogy eltalálja az Elnök fejét? 4 p.
 b) Elég nagy lesz a sebessége az Elnök fejéhez érkeve? 1 p.
 c) Adjuk meg a VBG-re ható erő vektorát az idő függvényében! 2 p.

Megoldás:

$$\mathbf{a)} \quad v_x = 0,27(1 - \cos(0,3t)) \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^t 0,27(1 - \cos(0,3t)) dt = x_0 + 0,27t - 0,9 \sin(0,3t)$$

$$x(60) = x_0 + 0,27 \cdot 60 - 0,9 \sin(0,3 \cdot 60) = x_0 + 16,88 = 28 \quad \rightarrow \quad x_0 = 11,12 \text{ m}$$

$$v_y = 0,06t^2 + 1,3 \quad \rightarrow \quad y(t) = y_0 + \int_0^t (0,06t^2 + 1,3) dt = y_0 + 0,02t^3 + 1,3t$$

$$y(60) = y_0 + 0,02 \cdot 60^3 + 1,3 \cdot 60 = y_0 + 4398 = 333 \quad \rightarrow \quad y_0 = -4065 \text{ m}$$

$$v_z = -2,4 \cdot e^{-t/120} \quad \rightarrow \quad z(t) = z_0 + \int_0^t -2,4 \cdot e^{-t/120} dt = z_0 + 288(e^{-t/120} - 1)$$

$$z(60) = z_0 + 288 \left(e^{-\frac{60}{120}} - 1 \right) = z_0 - 113,3 = 1,5 \quad \rightarrow \quad z_0 = 114,8 \text{ m}$$

A VBG kiindulási koordinátája $t = 0$ -ban $\mathbf{r}_0 = 11,12 \mathbf{i} - 4065 \mathbf{j} + 114,8 \mathbf{k}$ (m) kell legyen.

b) $\mathbf{v}(60) = 0,0917 \mathbf{i} + 217,3 \mathbf{j} - 1,456 \mathbf{k}$ (m/s), a nagysága $v(60) \approx 217,3 \text{ m/s} \gg v_{\min}$.

c) $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = 0,081 \sin(0,3t) \mathbf{i} + 0,12t \mathbf{j} + 0,02 \cdot e^{-t/120} \mathbf{k}$ (m/s²),
 $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = 4,05 \cdot 10^{-3} \sin(0,3t) \mathbf{i} + 6 \cdot 10^{-3} t \mathbf{j} + 10^{-3} \cdot e^{-t/120} \mathbf{k}$ (N).

2. Tita az ablakból dobja el a VBG-t ferdén lefelé, a kezdősebesség a vízszintessel 24°-os szöget zár be. A VBG kiindulási helyvektora $\mathbf{r}_a = 22 \mathbf{i} + 333 \mathbf{j} + 15,5 \mathbf{k}$ (m)

- a) Mekkora legyen a kezdősebesség nagysága, hogy a VBG pont eltalálja az Elnök fejét? 3 p.
 b) Mikor kell elhajítania Titának a VBG-t? 1 p.
 c) Elég nagy lesz a sebessége az Elnök fejéhez érkeve? 2 p.

Megoldás:

$$\mathbf{a), b)} \quad \mathbf{r}(t) = [22 + v_0 \cos(-24^\circ) \cdot t] \mathbf{i} + 333 \mathbf{j} + [15,5 + v_0 \sin(-24^\circ) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2] \mathbf{k}$$

A fenti függvényben $t = 0$ -ban indul a VBG az \mathbf{r}_a pontból, és t_1 időben érkezik az Elnök fejéhez:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_E = 28 \mathbf{i} + 333 \mathbf{j} + 1,5 \mathbf{k}, \quad \text{tehát } t_1 \text{ idővel dél előtt kell elhajítani a VBG-t.}$$

$$\text{A komponensek } 22 + v_0 \cos(-24^\circ) \cdot t_1 = 28 \quad \text{és} \quad 15,5 + v_0 \sin(-24^\circ) \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 1,5$$

Az elsőből $v_0 = (28 - 22) / (\cos(-24^\circ) \cdot t_1)$, ezt a másodikba beírva

$$15,5 + (28 - 22) \operatorname{tg}(-24^\circ) - \frac{1}{2} g t_1^2 = 1,5 \quad \rightarrow \quad t_1 \approx 1,505 \text{ s} \quad \rightarrow \quad v_0 \approx 4,363 \text{ m/s}$$

c) $\mathbf{v}(t_1) = v_0 \cos(-24^\circ) \mathbf{i} + [v_0 \sin(-24^\circ) - g \cdot t_1] \mathbf{k} = 3,986 \mathbf{i} + [-1,775 - 10 \cdot 1,505] \mathbf{k} = 3,986 \mathbf{i} - 16,82 \mathbf{k}$
 ennek nagysága $v(t_1) = 17,29 \text{ m/s} > v_{\min}$.

3. Tati egy hosszú, észrevehetetlen lejtőt készít, ami ott ér véget, ahol az Elnök feje lesz. A lejtő a vízszintessel 24° -os szöget zár be. A VBG és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható 0,24. Tati azt szeretné, hogy a VBG éppen v_{\min} sebességgel érkezzon az Elnök fejéhez.

a) Mikor kell elengednie Tatinak a lejtőn a VBG-t, és milyen távolságra a lejtő végétől? 4 p.

b) Tati nem tudott róla, de a VBG-t nyomasztotta a feladat, és ezért a mozgása úgy módosult, mintha egy állandó 0,5 N nagyságú erő is hatott volna rá függőlegesen lefelé a csúszás során. Hogyan változott emiatt a gyorsulása? (azaz mekkora lett így a gyorsulása?) 2 p.

Megoldás:

a) a VBG gyorsulása a lejtőn lefelé $a = g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = 1,875 \text{ m/s}^2 \rightarrow v(t) = 1,875t$

A lejtő alján t_2 idő elteltével $v(t_2) = 1,875t_2 = v_{\min} = 15 \rightarrow t_2 = 8,00 \text{ s}$

$\rightarrow s = \frac{1}{2} a t_2^2 = 60,0 \text{ m}$

b) A nyomasztó erő iránya és nagysága is pont megegyezik mg -vel, emiatt a felület által kifejtett nyomóerő, ill. a súrlódási erő is kétszeresére nő, így a VBG gyorsulása kétszeresére nő:

a lejtőre merőlegesen: $F_{ny} = mg \cos\alpha + F \cos\alpha = (0,05 \cdot 10 + 0,5) \cos 24^\circ = 0,9135 \text{ N}$

\rightarrow a súrlódási erő $F_s = \mu F_{ny} = \mu (mg + F) \cos\alpha = 0,24 (0,05 \cdot 10 + 0,5) \cos 24^\circ = 0,2193 \text{ N}$;

a lejtő síkjában $ma = mg \sin\alpha + F \sin\alpha - F_s = (mg + F) (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) = 0,1875 \text{ N}$

$\rightarrow a = F/m = (g + F/m) (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) = 3,750 \text{ m/s}^2$.

4. Tata egy kúpingát készít: a kötélfelső pontját az ablakhoz rögzíti, oda, ahonnan Tita eldobja a VBG-jét (azaz az $\mathbf{r}_a = 22 \mathbf{i} + 333 \mathbf{j} + 15,5 \mathbf{k}$ (m) pontba), a kötélfelső végéhez köti a saját VBG-jét, és a kötelet a megfelelő szögben kifeszítve elhelyezkedik az épület aljánál.

a) Milyen hosszú kötéltre lesz szüksége, hogy eltalálja az Elnök fejét? 1 p.

Tata a VBG-t úgy indítja el, hogy éppen egy negyed kört kell megtennie a VBG-nek az Elnök fejéig.

b) Mikor kell elindítania a VBG-t? 2 p.

c) Mekkora sebességgel kell elindítania a VBG-t? 1,5 p.

d) Mekkora sebességgel érkezik a VBG az Elnök fejéhez? 0,5 p.

e) Legalább milyen erőt kell kibírnia a kötélnak, hogy ne szakadjon el? 1 p.

Megoldás:

a) $l = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_E| = \sqrt{(22-28)^2 + 0^2 + (15,5-1,5)^2} = 15,23 \text{ m}$

b) A kúpinga periódusideje (levezetést ld. a gyakorlat anyagában)

$T = 2\pi \sqrt{l \cdot \cos\alpha / g}$, ahol α a kötélnak a függőlegessel bezárt szöge: $\text{tg}\alpha = 6/14$

$T = 2\pi \sqrt{14/10} = 7,434 \text{ s}$

Egy negyed periódus idejével, azaz $T/4 = 1,859 \text{ s}$ -mal előbb kell elengednie.

c, d) $v = r \cdot 2\pi/T = 6 \cdot 2\pi/7,434 = 5,071 \text{ m/s}$ (a VBG sebessége állandó)

(Ez a sebesség kisebb, mint v_{\min} , úgyhogy ez a VBG nem jut be az Elnök fejébe.)

e) $F_{k,\min} = mg / \cos\alpha = 0,5440 \text{ N}$.