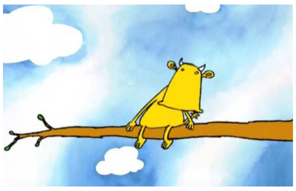
Fizika 1 Mechanika
számolási gyakorlat
zh1 2018. márc. 23. megoldás



*Kistehén síelni megy!

A feladatokban $g = 10\ m/s^2$ értékkel számoljunk!

1. Kistehén kedvet kapott a síeléshez, így hát repülő felhőre szállt és elindult Svájcba. Sebességét a következő függvény írja le:

$\mathbf{v}(t) = A\,\mathbf{i} + B/C \cdot e^{-t/C}\,\mathbf{j} + D \cdot \cos(E\cdot t)\,\mathbf{k}$ [m/s]

ahol $A = 170$ m/s; $B = 7000$ m; $C = 400$ s ; $D = 6{,}5$ m/s; $E = 6{,}5\cdot10^{-4}\ s^{-1}$.

a) Adjuk meg a 180 kg-os Kistehénre ható erő vektorát az idő függvényében! (2 p.)

b) Írjuk fel Kistehén helyvektorát az idő függvényében! Kistehén t = 0-ban az origóból indult. (3 p.)

c) Mekkora szöget zár be felszálláskor (t = 0-kor) Kistehén sebességvektora a függőlegessel? (2 p.)

Megoldás:

a) $\mathbf{a}(t) = 0\,\mathbf{i} - B/C^2 \cdot e^{-t/C}\,\mathbf{j} - D\cdot E \sin(E\cdot t)\,\mathbf{k} = -0{,}04375\, e^{-t/400}\,\mathbf{j} - 4{,}225\cdot10^{-3} \sin(6{,}5\cdot10^{-4}\,t)\,\mathbf{k}$ [m/s²]

$\mathbf{F}(t) = m\cdot \mathbf{a}(t) = -7{,}875\, e^{-t/400}\,\mathbf{j} - 0{,}7605 \sin(6{,}5\cdot10^{-4}\,t)\,\mathbf{k}$ [N]

b) $\mathbf{r}(t) = A\cdot t\,\mathbf{i} - B\cdot(e^{-t/C} - 1)\,\mathbf{j} + D/E \cdot \sin(E\cdot t)\,\mathbf{k} = 170t\,\mathbf{i} + 7000(1-e^{-t/400})\,\mathbf{j} + 10^4 \sin(6{,}5\cdot10^{-4}\,t)\,\mathbf{k}$ [m]

c) $\mathbf{v}(0) = 170\,\mathbf{i} + 17{,}5\,\mathbf{j} + 6{,}5\,\mathbf{k}$ m/s

$|\mathbf{v}(0)| = 171{,}02$ m/s, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(0) = 6{,}5$ m/s , $\cos\varphi = 6{,}5 / (1\cdot171{,}02) = 0{,}038$, $\varphi = 87{,}82°$.

2. A reptéren már várta őt barátja, Milka tehén, akivel már nagyon régen találkoztak. Kistehén örömében Milka tehén nyakába ugrott.

a) Mekkora, milyen irányú sebességgel ugrott el, ha Milka tehén egy emelettel, azaz 3,8 m-rel lejjebb várakozott rá, 6,4 m-rel északabbra volt tőle, és 1,2 s alatt ért oda hozzá? (4 p.)

b) Mekkora nagyságú sebességgel érkezett Kistehén Milka tehén nyakába? (2 p.)

Megoldás:

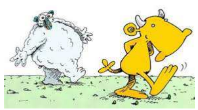
a) $x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$, $z(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - g/2 \cdot t^2$ $\rightarrow$ $z = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - g/2 \cdot t^2$

$t_1 = 1{,}2$ s , $x(t_1) = 6{,}4$ m , $z(t_1) = -3{,}8$ m

$6{,}4 = v_0 \cos\alpha \cdot 1{,}2$, $-3{,}8 = v_0 \sin\alpha \cdot 1{,}2 - g/2 \cdot 1{,}2^2$

$\rightarrow$ $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}53125$, $\alpha = 27{,}98°$, $v_0 = 6{,}039$ m/s .

b) $v_x = v_0 \cos\alpha = 5{,}333$ m/s , $v_z = v_0 \sin\alpha - g\cdot t_1 = 2{,}833-12 = -9{,}167$ m/s , $v = \sqrt{\ldots} = 10{,}61$ m/s .



3. Kistehén nem mert felülni a síliftre, mert Milka tehén azt mondta neki, hogy nem biztonságos, leszakadhat alatta. Felsétálni nem volt kedve (félt a hópocakoktól), ezért a húzós drótköteles liftet választotta. A lejtő hajlásszöge 7,2°; Kistehén sílécе és a hó közötti csúszási súrlódási együttható 0,09 ; a tapadási súrlódási együttható 0,15.

a) Mekkora súrlódási erő hat Kistehénre (aki 180 kg), mielőtt megfogja a drótkötelet? (1,5 p.)

b) Milyen erős drótkötél kell ahhoz (azaz minimum mekkora erőt kell átadnia), hogy megmozdítsa a lejtő aljánál álldogáló Kistehént? (1,5 p.)

c) Mekkora erővel hat a drótkötél Kistehénre állandó sebességű felfelé csúszás közben? (1 p.)

d) Miután Kistehén feljutott az 50 m hosszú lejtő tetejére, Milka tehén meglöki őt lefelé 3 m/s kezdősebességgel. Mennyi idő alatt ér le a lejtő aljára? (Kistehén külön nem fékez és nem is kanyarog, a közegellenállás elhanyagolható.) (2 p.)

Megoldás:

mg lejtővel párhuzamos komponense mg $\sin\alpha$ = 225,6 N ,

F_{ny} = mg $\cos\alpha$ = 1785,8 N ,

a csúszási súrlódási erő $F_s = \mu F_{ny}$ = 160,7 N ,

a tapadási súrlódási erő $F_t \leq \mu_t F_{ny}$ = 267,9 N .

a) Kistehént lefelé mg $\sin\alpha$ = 225,6 N gyorsítaná, ami kisebb F_t maximális értékénél, tehát Kistehén a lejtőn tapad, és a rá ható tapadási súrlódási erő F_t = 225,6 N .

b) A drótkötél által kifejtett erőnek le kell győznie mg lejtővel párhuzamos komponensén kívül a tapadási súrlódási erő maximális lehetséges értékét: $F_{kötél} \geq$ 225,6+267,9 = 493,5 N kell legyen.

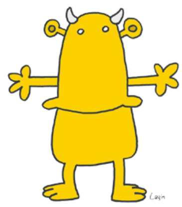
c) Felfelé való mozgás közben az F_s csúszási súrlódási erő lefelé hat (mg $\sin\alpha$-val azonos irányba), a drótkötél által kifejtett erő $F_{kötél}$ = 225,6+160,7 = 386,3 N.

d) Mivel Milka tehén lefelé való mozgásba hozta Kistehént, így a csúszási súrlódási erő felfelé hat rá:

$ma = mg\sin\alpha - F_s \quad \rightarrow \quad a = 0{,}3604\ m/s^2$ lefelé ;

$s = v_0 t + a/2\, t^2$: $\quad 50 = 3t + 0{,}3604/2\, t^2 \quad \rightarrow \quad t = 10{,}3$ s .

4. Kistehén egy 22 m sugarú gömb alakú domb tetejéről akar lejönni, ami olyan jeges, hogy a súrlódás teljesen elhanyagolható. Tudja, hogy abból baj lesz, ha hagyja magát gyorsulni, ezért állandó 8 m/s nagyságú sebességet tart.



a) Rendben lejut-e csúszva a domb aljába? Ha nem, akkor hol száll el? (2 p.)

Amikor a domb teteje és alja közötti távolságnak éppen a harmadát tette meg,…

b) … mekkora Kistehén súlya? (Kistehén még mindig 180 kg) (2 p.)

c) … mekkora erővel kell fékeznie, hogy állandó legyen a sebessége? (1 p.)

d) … mekkora lenne a gyorsulásának nagysága fékezés nélkül? (1 p.)

Megoldás:

Mivel v = konst., ezért a_{cp} = konst.: $a_{cp} = v^2/R = 8^2/22 = 2{,}909\ m/s^2$.

a) Legyen φ a Kistehén pillanatnyi helyéhez mutató vektornak a függőlegessel bezárt szöge.

$m\, a_{cp} = mg\cos\varphi - F_{ny} \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg\cos\varphi - m\, a_{cp}$

A domb által kifejtett nyomóerő nem lehet negatív: $F_{ny} \geq 0$:

$mg\cos\varphi \geq m v^2 / R \quad \rightarrow \quad \cos\varphi \geq v^2/(g\cdot R) = 0{,}2909 \quad \rightarrow \quad \varphi \leq 73{,}09°$, tehát ez után elszáll.

b) $\varphi = 30°$: $F_{ny} = mg\cos\varphi - m\, a_{cp}$ = 1035,2 N .

c) mg $\sin\varphi$ = 900 N gyorsítaná abban a pontban, tehát ekkora erővel kell ott fékeznie.

d) $a_t = g\sin\varphi = 5\ m/s^2$, $\quad a_{cp} = 2{,}909\ m/s^2$, $\quad a = \sqrt{(a_t^2 + a_{cp}^2)} = 5{,}785\ m/s^2$.

* https://hu.wikipedia.org/wiki/Kistehén_Tánczenekar, http://www.kistehenzenekar.hu/