Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat zh1 pót 2014. máj. 19. megoldások

1. Egy test sebességét az alábbi függvény adja meg:

$\mathbf{v}(t) = 2 \cdot e^{0,1t}\,\mathbf{i} + (3t^2+5)\,\mathbf{j}$ [m/s]

A test a t = 0 s-ban az $\mathbf{r_0} = 40\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{k}$ [m] pontból indul.

a) Töltsük ki az alábbi táblázatot:

t [s]	**r**(t) [m]	**v**(t) [m/s]	**a**(t) [m/s^2]
1			
3			

b) Számoljuk ki a test átlagsebesség-vektorát az 1 s és 3 s közötti intervallumra!

MO.

$dx/dt = 2 \cdot e^{0,1t}$ $x(t) = (2/0,1) \cdot e^{0,1t} + k_1$ $x(0) = (2/0,1) \cdot e^0 + k_1 = 40$ $k_1 = 20$

$dy/dt = (3t^2+5)$ $y(t) = t^3 + 5t + k_2$ $y(0) = 0+0+k_2 = 0$ $k_2 = 0$

$dz/dt = 0$ $z(t) = 0 + k_3$ $z(0) = 0 + k_3 = 10$ $k_3 = 10$

$\mathbf{r}(t) = (20 \cdot e^{0,1t} + 20)\,\mathbf{i} + (t^3+5t)\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k}$

$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt = 0,2 \cdot e^{0,1t}\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j}$

t [s]	**r**(t) [m]	**v**(t) [m/s]	**a**(t) [m/s^2]
1	$\mathbf{r}(1) = 42,103\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k}$	$\mathbf{v}(1) = 2,2103\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$	$\mathbf{a}(1) = 0,2210\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$
3	$\mathbf{r}(3) = 46,997\,\mathbf{i} + 42\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k}$	$\mathbf{v}(3) = 2,6997\,\mathbf{i} + 32\,\mathbf{j}$	$\mathbf{a}(3) = 0,2700\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{j}$

b) $\mathbf{v}_{\text{átl}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t = (\,\mathbf{r}(3) - \mathbf{r}(1)\,) / (3-1) = (4,894\,\mathbf{i} + 36\,\mathbf{j}\,) / 2 = 2,447\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{j}$ [m/s]

2. Eldobunk egy kis labdát v_0 = 9 m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest felfelé 66°-os szöggel 1,45 m magasról. Előttünk 3,3 m-re van egy 18 m magas függőleges fal.

a) Mennyi idő alatt ér a labda a falhoz?

b) Milyen magasan éri el a falat?

c) Mekkora a labda sebessége a falhoz érkezéskor?

d) Mekkora szöget zár be a labda sebessége a fallal, amikor odaér?

e) Mekkora maximális magasságot ért el a labda?

MO.

a) $x = v_0\cos\alpha \cdot t = 9 \cdot \cos 66° \cdot t = 3,66t$; x = 3,3 m-hez $\mathbf{t_d = 0,901}$ **s** alatt ér el.

b) $z = z_0 + v_0\sin\alpha \cdot t - ½\,gt^2 = 1,45 + 8,22t - 5t^2$; ha $t = t_d$, akkor $\mathbf{h} = z(t_d) \approx$ **4,8 m**.

c) v_x = konst. = 3,66 m/s; $v_z(t) = v_0\sin\alpha - g \cdot t = 8,22 - 10t$; t_d-nél $v_z(t_d) = -0,793$ m/s;

a sebesség nagysága Pitagorasz-tétellel $\mathbf{v(t_d) \approx 3,745}$ **m/s**.

d) a vízszintessel arc tg (–12,22/3,66) ≈ –12,2°-ot zár be, a függőleges fallal **77,8**°-ot.

e) $v_z = 0$ lesz $t_e = v_0\sin\alpha / g \approx 0,822$ s-nál, ekkor $\mathbf{z_{max}} = z(t_e) \approx$ **4,83 m**.

3. Vízszintessel 9°-ot bezáró sík lejtőn van egy 5 kg tömegű test. A test és a felület közötti tapadási súrlódási együttható 0,25; a csúszási súrlódási együttható 0,18. A testhez egy kötél van kötve, amit a lejtő tetején lévő (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csigán átvetettünk, és egy 3 kg-os testet rögzítettünk a végére.

a) Mekkora az 5 kg-os test gyorsulása, és mekkora a kötélerő?

b) Hogyan változik a test gyorsulása és a kötélerő, ha a függőleges kötélszakaszról eltávolítjuk a 3 kg-os testet, viszont állandó, 30 N nagyságú erővel húzzuk függőlegesen lefelé?
c) Mi az a minimális tömeg, amit a függőleges kötélszakasz végére kell rögzíteni, hogy az 5 kg-os test álló helyzetből meginduljon felfelé a lejtőn?

MO.
Az 5 kg-os testre a lejtő által kifejtett nyomóerő $F_{ny} = Mg\cdot\cos\alpha \approx 49{,}38$ N;
a tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_{t,max} = \mu_t\cdot F_{ny} \approx 12{,}35$ N lehet,
ami nagyobb, mint a Mg-nek a lejtő irányú komponense: $Mg\cdot\sin\alpha \approx 7{,}82$ N,
tehát a test önmagától nem kezd csúszni a lejtőn.
Ha egy kötéllel felfelé kezdjük húzni, akkor F_t is lefelé hat, tehát akkor kezd mozogni, ha a kötélerő nagyobb, mint $Mg\cdot\sin\alpha+F_{t,max} \approx 20{,}17$ N , ami teljesül, mert ha a testek állnak, akkor $F_k = mg = 30$ N.
Ha az 5 kg-os test már csúszik, akkor a súrlódási erő $F_s = \mu_s\cdot F_{ny} \approx 8{,}89$ N.
a) az 5 kg-os testre $Ma = F_k - Mg\cdot\sin\alpha - \mu_s\cdot F_{ny} = F_k - 16{,}71$
a 3 kg-os testre $ma = mg - F_k = 30 - F_k$
ezekből **$a \approx 1{,}66$ m/s², $F_k \approx 25$ N**.
b) ilyenkor **$F_k = 30$ N**: $Ma = F_k - Mg\cdot\sin\alpha - \mu_s\cdot F_{ny} = 13{,}29$ → **$a \approx 2{,}66$ m/s²**.
c) az m tömegű testre $ma = mg - F_k$
az 5 kg-os testre $Ma = F_k - Mg\cdot\sin\alpha - F_{t,max} = F_k - 20{,}17$
$a \geq 0$, ha **$m \geq 2{,}02$ kg**.

4. Egy 2 kg tömegű kis rakétára rákötöttünk egy 0,8 m hosszú kötelet, a kötél másik végét pedig rögzítettük egy vízszintes, súrlódásmentes asztalon. A kötelet feszesre húztuk és bekapcsoltuk a rakétát, ami álló helyzetből elindulva vízszintes körpályán kezdett mozogni. A rakéta által kifejtett erő állandó, $F_r = 2{,}4$ N nagyságú volt és mindig a kötélre merőleges volt.
a) Mekkora volt a rakéta gyorsulása 2 s elteltével?
b) A kötél 22,5 N-nál nagyobb erő hatására elszakad. Az indítás után mennyivel szakadt el a kötél, mennyi volt abban a pillanatban a sebessége, és hol volt akkor a rakéta (a kötél mekkora szöggel fordult el az indulás óta)?

MO.
a) A rakéta tangenciális gyorsulása $a_t = F_r / m = 1{,}2$ m/s²,
a centripetális gyorsulása pedig $a_{cp} = v^2 / l$,
ahol v a tangenciális gyorsulás miatt egyenletesen nő: $v = a_t\cdot t = 1{,}2t$;
2 s elteltével $v(2) = 2{,}4$ m/s, amivel $a_{cp}(2) = 7{,}2$ m/s² ,
így a rakéta gyorsulása Pitagorasz-tétellel **$a \approx 7{,}3$ m/s²**.
b) A kötélerő adja a test centripetális gyorsulását, ami a sebesség (ill. idő) négyzetével arányosan nő, és a kötél akkor szakad el, amikor $F_{k,max} = 22{,}5 = ma_{cp} = mv^2/l = (2/0{,}8)v^2 = 2{,}5v^2$,
vagyis amikor $v = 3$ m/s. Ez $t = 3/1{,}2 = 2{,}5$ s múlva lesz, és addig a rakéta
$s = ½\, a_t \cdot t^2 = 3{,}75$ m-t tesz meg a 0,8 m sugarú körön, azaz
$3{,}75 / (2\cdot 0{,}8\cdot\pi) = 0{,}746$ fordulatot, vagyis $0{,}746\cdot 360° = 268{,}6°$-ot fordult a kötél addig.
VAGY: Ez utóbbit számolhatjuk úgy is, hogy a tangenciális gyorsulásból szöggyorsulást számolunk:
$\beta = a_t / l = 1{,}2/0{,}8 = 1{,}5\ s^{-2}$, amivel $\varphi = ½\,\beta\cdot t^2 = (1{,}5/2)\cdot 2{,}5^2 = 4{,}6875$ rad $= 268{,}6°$.