Fizika 1 Mechanika zh1 pót 2019. máj. 22. megoldás

A feladatokban $g = 10\ m/s^2$-tel számoljunk!

1. Egy m = 0,5 kg tömegű testre két erő hat: egy ismeretlen $\mathbf{F_1}(t)$ erő és az

$$\mathbf{F_2}(t) = 5\sin(2t+\pi)\,\mathbf{i} - 0{,}8\,\mathbf{k}\ \ [\mathrm{N}]\ \ \text{erő.}$$

A test sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{v}(t) = 5\sin(2t+\pi)\,\mathbf{i} + \frac{6}{(t-2)^2}\,\mathbf{j} + (1{,}6t + 2t^2)\,\mathbf{k}\ \ [\mathrm{m/s}]$$

a) Adjuk meg az ismeretlen $\mathbf{F_1}(t)$ erőt! (3,5 p.)
b) Adjuk meg a test $\mathbf{r}(t)$ helyvektorát, ha a t = 0 s-ban a test az origóban van! (3 p.)
c) Mekkora szöget zár be a sebességvektor az $\mathbf{F_2}$ erővel t = 1 s-ban? (2 p.)

Megoldás:

a) $m\mathbf{a} = m\,\dot{\mathbf{v}} = \Sigma\,\mathbf{F_i} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} \;\rightarrow\; \mathbf{F_1} = m\,\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F_2}$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = 10\cos(2t+\pi)\,\mathbf{i} + \frac{-12}{(t-2)^3}\,\mathbf{j} + (1{,}6 + 4t)\,\mathbf{k}\ \ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$m\mathbf{a} = 5\cos(2t+\pi)\,\mathbf{i} + \frac{-6}{(t-2)^3}\,\mathbf{j} + (0{,}8 + 2t)\,\mathbf{k}\ \ [\mathrm{N}]$$

$$\mathbf{F_1} = 5\,[\cos(2t+\pi) - \sin(2t+\pi)]\,\mathbf{i} + \frac{-6}{(t-2)^3}\,\mathbf{j} + (1{,}6 + 2t)\,\mathbf{k}\ \ [\mathrm{N}]$$

b) $$\mathbf{r}(t) = -2{,}5\,[\cos(2t+\pi) + 1]\,\mathbf{i} - \left[3 + \frac{6}{t-2}\right]\mathbf{j} + \left(0{,}8t^2 + \frac{2}{3}t^3\right)\mathbf{k}$$

c) $\mathbf{v}(1) = -4{,}546\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 3{,}6\,\mathbf{k}$ $|\mathbf{v}(1)| = 8{,}344$ [m/s]

$\mathbf{F_2}(1) = -4{,}546\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 0{,}8\,\mathbf{k}$ $|\mathbf{F_2}(1)| = 4{,}616$ [N]

$\mathbf{v}(1)\cdot\mathbf{F_2}(1) = (-4{,}546)\cdot(-4{,}546) + 0\cdot 6 + (-0{,}8)\cdot 3{,}6 = 17{,}79$

$\cos\varphi = 17{,}79 / (4{,}616\cdot 8{,}344) = 0{,}4618$ $\varphi = 62{,}5° = 1{,}09$ rad

2. Eldobtunk egy testet 66 m magasról 4 m/s nagyságú kezdősebességgel 60°-os szögben a vízszinteshez képest felfelé.

a) Hol lesz a test 1,8 s múlva, és mekkora lesz akkor a sebességének nagysága? (3 p.)
b) Mikor lesz a test sebessége vízszintes? (1 p.)
c) Mikor zár be a test sebessége a vízszintessel 45°-ot felfelé? (1 p.)
d) Mikor zár be a test sebessége a vízszintessel 45°-ot lefelé? (1 p.)
e) Mikor zár be a test elmozdulásvektora a vízszintessel 45°-ot felfelé? (2,5 p.)

Megoldás:

a) $v_x = v_0\cos\alpha = 2{,}000$ m/s; $v_{0z} = v_0\sin\alpha = 3{,}464$ m/s

$x(1{,}8) = 2{,}000\cdot 1{,}8 = 3{,}600$ m; $z(1{,}8) = -10/2\cdot 1{,}8^2 + 3{,}464\cdot 1{,}8 + 66 = 56{,}04$ m

$v_x = 2{,}000$ m/s; $v_z(1{,}8) = 3{,}464 - 10\cdot 1{,}8 = -14{,}54$ m/s; $v(1{,}8) = \sqrt{(2{,}00^2 + 14{,}54^2)} = 14{,}67$ m/s

b) a pálya legfelső pontján, amikor $v_z = 0$: $3{,}464 - 10\cdot t_b = 0 \;\rightarrow\; t_b = 0{,}3464$ s

c) $v_z / v_x = \mathrm{tg}(45°) = 1$: $v_z = v_x\cdot \mathrm{tg}(45°) = v_x = 2{,}00$ m/s kell legyen

$v_z(t_c) = 3{,}464 - 10\cdot t_c = 2{,}00 \;\rightarrow\; t_c = 0{,}1464$ s

d) $v_z / v_x = \mathrm{tg}(-45°) = -1$: $v_z = v_x\cdot \mathrm{tg}(-45°) = -v_x = -2{,}00$ m/s kell legyen

$v_z(t_d) = 3{,}464 - 10\cdot t_c = -2{,}00 \;\rightarrow\; t_c = 0{,}5464$ s

e) elmozdulásvektor: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = [x(t) - x(0)]\,\mathbf{i} + [z(t) - z(0)]\,\mathbf{k}$

$\Delta\mathbf{r} = [v_0\sin\alpha\cdot t - 0]\,\mathbf{i} + [\,(-g/2\cdot t^2 + v_0\sin\alpha\cdot t + 66) - 66]\,\mathbf{k} = [v_0\sin\alpha\cdot t]\,\mathbf{i} + [-g/2\cdot t^2 + v_0\sin\alpha\cdot t]\,\mathbf{k}$

$\Delta z(t_e) / \Delta x(t_e) = \mathrm{tg}(45°) = 1$: $\Delta z(t_e) = \Delta x(t_e)$ kell legyen

$-g/2\cdot t_e^2 + v_0\sin\alpha\cdot t_e = v_0\cos\alpha\cdot t_e \;\rightarrow\; t_e = 2\,v_0\,(\sin\alpha - \cos\alpha) / g = 0{,}2928$ s

3. φ = 20° hajlásszögű lejtőn m = 1,4 kg tömegű testet tolunk felfelé a lejtővel párhuzamos F_1 erővel v = 4 m/s állandó sebességgel. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható μ = 0,11; a tapadási súrlódási együttható μ_t = 0,33.

a) Mekkora az F_1 erő nagysága? (2 p.)

A test tolását 1,5 m magasan abbahagyjuk, így a test az eddigi 4 m/s-os sebességgel indul felfelé a 3 m magas lejtőn.

b) Mennyi idő alatt és mekkora úton áll meg a test? (2,5 p.)

c) Mi történik ezután?
Vizsgáljuk meg, hogy a test tapad-e vagy csúszik-e!
Ha a test tapad: mekkora a rá ható tapadási súrlódási erő nagysága?
Ha a test csúszik: mekkora a gyorsulása? (2,5 p.)

d) Mekkora hajlásszög esetén lenne a lejtőn lecsúszó test sebessége állandó? (1 p.)

Megoldás:

a) v = konst. $\rightarrow$ a = 0 ; mozgásban van, μ = 0,11
az F erő is a lejtővel párhuzamos, így $F_{ny} = mg\cos\alpha = 13{,}16$ N
$ma = F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 4{,}788 + 1{,}447 = 6{,}235$ N

b) $a = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = -4{,}454$ m/s^2
$v = v_0 + at = 4 - 4{,}454\,t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0{,}8981$ s ; $s = 4t - 4{,}454/2 \cdot t^2 = 1{,}796$ m

c) $mg\sin\alpha = 4{,}788$ N hat lefelé
$F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = 0{,}33 \cdot 13{,}16 = 4{,}341$ N $\rightarrow$ a test elkezd csúszni
$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 2{,}387$ m/s^2

d) $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \mu = 0{,}11 \quad \rightarrow \quad 6{,}277°$