

1. A Kelet-Délvidéki Kígyómúzeum két tartály formaldehidet rendelt tartósításhoz. Az egyikben sima formaldehid van, a másikban meg olyan, amiben az egyik H helyett egy deutérium van. Szeretnék tudni, hogy a deutériumot tartalmazó molekulában mennyivel van eltolódva a molekula tömegközéppontja az alapmolekulához képest. Számoljuk ki nekik! A C–H kötés hossza 111 pm, a C=O kötés hossza 121 pm, a két H közötti kötésszög 116,6° (a molekula sík).

MO. Legyen pl. C az origóban, $m_C = 12$

O az x tengelyen pozitív irányban, $x_O = 121$ pm, $y_O = 0$, $m_O = 16$

H-ek: $x_H = -111 \cdot \cos(116,6^\circ/2) \approx -58,33$ pm; $y_H = \pm 111 \cdot \sin(116,6^\circ/2) \approx \pm 94,44$ pm; $m_H = 1$

$$x_s = \frac{12 \cdot 0 + 16 \cdot 121 + 1 \cdot (-58,33) + 1 \cdot (-58,33)}{16 + 12 + 1 + 1} \approx 60,64 \text{ pm}; \quad y_s = 0, \text{ mert a molekula szimmetrikus az x tengelyre}$$

Ha az egyik H helyett deutérium van ($m_D=2$), akkor

$$x_s = \frac{12 \cdot 0 + 16 \cdot 121 + 1 \cdot (-58,33) + 2 \cdot (-58,33)}{16 + 12 + 1 + 2} \approx 56,81 \text{ pm}, \quad y_s = \frac{16 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 1 \cdot (-94,44) + 2 \cdot 94,44}{16 + 12 + 1 + 2} \approx 3,05 \text{ pm}$$

$$d = \sqrt{(60,64 - 56,81)^2 + (0 - 3,05)^2} \approx 4,9 \text{ pm.}$$

2. A TEK gyakorlatot tart, ahol különleges eszközökkel létrehoznak egy speciális erőteret, amit a következő függvény ír le:

$$\mathbf{E}_{\text{TEK}} = (3z+4) \mathbf{i} - yz \mathbf{j} + (3x-y^2) \mathbf{k} \quad [\text{a térerősség N/kg-ban értendő; } x, y, z \text{ pedig m-ben}]$$

Ez az erőter magával ragadja a tábornok 20 dkg tömegű sapkáját a $P_0(-6, 2, -1)$ pontban, majd az

$$\mathbf{r}(t) = (5t-t^2) \mathbf{i} - 2t \mathbf{j} + (3+4t) \mathbf{k} \text{ görbén a } P_1(6, -4, 11) \text{ pontba viszi.}$$

a) Konzervatív-e a fenti TEK-erő?

b) Számoljuk ki a TEK-erő sapkán végzett munkáját!

(A leggyorsabb beküldők közül négyen részt vehetnek majd a legközelebbi akciójukban!)

MO.

a) $\text{rot } \mathbf{E} = (-2y - (-y)) \mathbf{i} - (3-3) \mathbf{j} + (0-0) \mathbf{k} = -y \mathbf{i} \neq \mathbf{0}$, nem konzervatív \rightarrow az előírt vonalintegrált kell kiszámolni

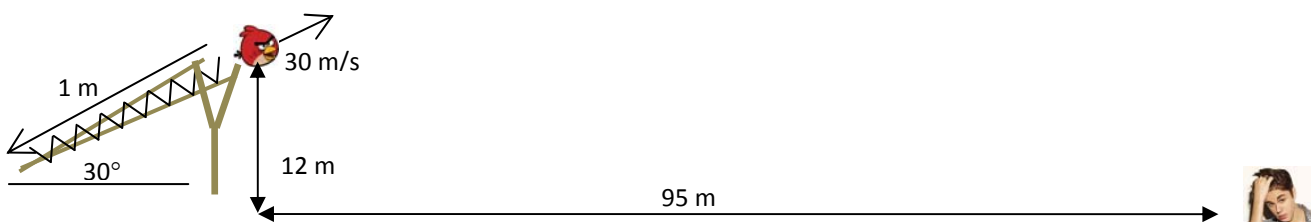
b) $\mathbf{E} = (3 \cdot (3+4t) + 4) \mathbf{i} - ((-2t) \cdot (3+4t)) \mathbf{j} + (3 \cdot (5t-t^2) - (-2t)^2) \mathbf{k} = (13+12t) \mathbf{i} + (6t+8t^2) \mathbf{j} + (15t-7t^2) \mathbf{k}$

$$d\mathbf{r} = [(5-2t) \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}] dt$$

A t értékek visszszámolva $\mathbf{r}(t)$ -ből: P_0 -hoz $t_0 = -1$ ill. P_1 -hez $t_1 = 2$.

$$W/m = \int_{-1}^2 \{ (13+12t) \cdot (5-2t) + (6t+8t^2) \cdot (-2) + (15t-7t^2) \cdot 4 \} dt = \dots = \int_{-1}^2 (65+82t-68t^2) dt = [65t+41t^2-68/3t^3]_{-1}^2 = 112,6 - (-1,3) = 114 \text{ J/kg}; \quad W = 0,2 \cdot 114 = 22,8 \text{ J}$$

3. Ugye emlékszünk még arra, hogy a Mérges Madárkák meg akarták csúzlizni Justin Bieber fejét? 12 m-rel magasabbról indultak, mint Bieber feje és a vízszintesen mért távolság 95 m volt a csúzlijuk vége és Bieber feje között; 30 m/s kezdősebességgel indultak a csúzliból, a vízszinteshez képest 30 fokos szöggel felfelé. Ezt a kezdősebességet úgy érték el, hogy Dzszenike hátrahúzta a ferde (a vízszintessel 30° fokos szöget bezáró) csúzligumit 1 m-nyit, benne egy 40 dkg-os Mérges Madárkával, majd elengedte. A csúzligumi által kifejtett erő lineáris rugalmas erő, ugyanolyan, mintha egy megfelelően hosszú rugó lenne.



a) Mekkora munkát kellett végeznie Dzszenikének a csúzli meghúzásakor?

b) Mekkora erővel kellett a csúzligumit megtartania a kilövés előtt? (az erő a gumival ellentétes irányú)

c) Mekkora sebességgel éri el a Mérkes Madárka Bieber fejét? A számolást most energia-megmaradást felhasználva végezzük el! (a közegellenállás elhanyagolható)

MO.

a) Dzsénike a csúzli ellenében $\frac{1}{2} k(\Delta l)^2$ munkát végzett, de mivel a csúzli ferde, a nehézségi erő segítette őt, méghozzá $mg \cdot (\Delta l \cdot \sin \alpha)$ munkát végzett a madárkán, tehát Dzsénike összesen $W_{Dzs} = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 - mg \cdot (\Delta l \cdot \sin \alpha)$ munkát végzett. A csúzli elengedése után ez a munka a madárka mozgási energiájává alakul, amikor az v_0 sebességgel elhagyja a csúzlit, tehát $W_{Dzs} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 30^2 = 180 \text{ J}$.

b) Először a csúzli „rugóállandóját” kell kiszámolnunk:

$$W_{Dzs} = 180 \text{ J} = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 - mg \cdot (\Delta l \cdot \sin \alpha) = \frac{1}{2} k \cdot 1^2 - 0,4 \cdot 10 \cdot (1 \cdot \sin 30^\circ) \rightarrow k = 364 \text{ N/m},$$

ezzel a csúzli kihúzva tartásához szükséges erő $\Delta l = 1 \text{ m}$ megnyúlásnál $F = 1 \cdot 364 = 364 \text{ N}$. Ez az erő a Madárka nélkül kihúzott csúzlira érvényes, azaz ha először üresen kihúzta Dzsénike, és csak aztán tette bele Madárkát.

+1 pontért: Ha már a Madárka is rajta ül a csúzligumin, akkor ő is húzza azt $mg \sin 30^\circ = 2 \text{ N}$ erővel, Dzsénikének tehát csak 362 N erővel kell húznia.

c) $H = 12 \text{ m}$, $v_0 = 30 \text{ m/s}$, $mgH + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gH + v_0^2} \approx 33,76 \text{ m/s}$

4. A május elsejei katonai felvonuláson a Bölcs Elvtárs (a Kedves Vezető fia, a Nagy Vezér unokája) egy páncélozott terepjárón vonul fel a népe előtt. A népe nagy örömeiben virágokkal szórta fel az utat a Bölcs Elvtárs előtt, így a terepjáró előtt egy hókotró kénytelen azt tisztára kotorni. A hókotró a vezetőjével $m = 1,4 \text{ t}$, a páncélozott terepjáró a Bölcs Elvtárral és testőreivel $M = 1,8 \text{ t}$ tömegű. Mindkét járműre hat gördülési ellenállási erő, $\mu_g = 0,02$, és ezen kívül közegellenállási erő is: a hókotróra a virágtenger ellenállása miatt lineáris közegellenállási erő hat, $k_m = 140 \text{ kg/s}$; a terepjáróra négyzetes légellenállási erő, $k_M = 1,3 \text{ kg/m}$. A terep vízszintes. Mindkét jármű állandó sebességgel halad, miközben a járművek motorja által kifejtett erő állandó. A hókotró sebessége $v_m = 5 \text{ m/s}$, a terepjáróé $v_M = 7 \text{ m/s}$.

a) Mekkora a hókotró, ill. a terepjáró motorja által kifejtett erő nagysága?

Mivel a terepjáró gyorsabb, mint a hókotró és a sofőr elbambult, nem figyelt az útra, így a terepjáró utoléri a hókotrot. A karambolban mindkét jármű erősen meggyűrődik és teljesen összetapadnak. (Szerencsére a Bölcs Elvtársnak nem esik komoly baja, csak az egyik foga csorbul meg, de azért nem szívesen cserélnék a sofőrrel...)

b) Mekkora lesz a két járműből álló roncs sebessége közvetlenül az ütközés után?

c) Mekkora az ütközés során

a terepjáró impulzusának változása?

a hókotró impulzusának változása?

az összes impulzus-változás?

d) Mekkora az ütközés során

a terepjáró mechanikai energiájának változása?

a hókotró mechanikai energiájának változása?

az összes mechanikai energia-változás?

A c) és d) kérdésre előjelekkel együtt adjuk meg a választ!

MO.

a) hókotró: $ma = F_m - \mu_g mg - k_m \cdot v_m = 0 \rightarrow F_m = \mu_g mg + k_m \cdot v_m = 980 \text{ N}$

terepjáró: $Ma = F_M - \mu_g Mg - k_M \cdot v_M = 0 \rightarrow F_M = \mu_g Mg + k_M \cdot v_M = 423,7 \text{ N}$

b) impulzus-megmaradással: $m \cdot v_m + M \cdot v_M = (m+M) \cdot u \rightarrow u = 6,125 \text{ m/s}$

c) Impulzus-változások: terepjáró $\Delta I_M = M \cdot (u - v_M) = -1575 \text{ kgm/s}$, hókotró $\Delta I_m = m \cdot (u - v_m) = +1575 \text{ kgm/s}$, $\Delta I_{\text{össz}} = 0$

d) Energia-változások: terepjáró $\Delta E_M = \frac{1}{2} M \cdot (u - v_M)^2 = -10,336 \text{ kJ}$, hókotró $\Delta E_m = \frac{1}{2} m \cdot (u - v_m)^2 = +8,761 \text{ kJ}$,

$\Delta E_{\text{össz}} = -1,575 \text{ kJ}$ (az összenergia nem marad meg a rugalmatlan ütközés miatt)