Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat zh2 2014. ápr. 30. megoldások

Ami a Show's Sonkából kimaradt…

Az összes feladatban g = 10 m/s^2

1. Az Ortofenomének feladata volt akadályozni azt, hogy a másodikról a harmadik emeletre feljussanak az emberek. Ehhez az Ortofenomének felsorakoztak a lépcső szélén locsolócsövekkel és különböző irányú vízsugarakkal a következő erőteret hozták létre:

$\mathbf{F} = (4xz - yz - z^2)\,\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + (2x^2 - xy - 2xz)\,\mathbf{k}$ [N]

A második emeleti kiindulópont a P_0 (3; 2; 6) [m], a lépcsőforduló a P_1 (5; 2; 7,5) [m] pont, és az érkezési pont a harmadik emeleten P_2 (3; 2; 9) [m], a felfelé vezető út tehát két egyenes szakasznak tekinthető.

a) Konzervatív-e az Ortofenomének által előállított erőtér? **2 p.**

b) Mekkora munkát végez a fenti erő azon, aki a $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2$ úton felmegy? **4 p.**

MO.

a) $$\mathbf{rot\ F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xz - yz - z^2 & -xz & 2x^2 - xy - 2xz \end{vmatrix} =$$

$$= (-x - (-x))\mathbf{i} - \big((4x - y - 2z) - (4x - y - 2z)\big)\mathbf{j} + (-z - (-z))\mathbf{k} = \mathbf{0}$$ **; konzervatív.**

b) Mivel az erőtér konzervatív ♠→

♠→ létezik potenciálfüggvény:

$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = -F_x = -(4xz - yz - z^2) \;\rightarrow\; E_{pot} = -2x^2z + xyz + xz^2 + k_1(y,z)$

$\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} = -F_y = -(xz) \;\rightarrow\; E_{pot} = xyz + k_2(x,z)$

$\frac{\partial E_{pot}}{\partial z} = -F_z = -(2x^2 - xy - 2xz) \;\rightarrow\; E_{pot} = -2x^2z + xyz + xz^2 + k_3(x,y)$

tehát a potenciálfüggvény $E_{pot} = xyz + xz^2 - 2x^2z$; ezzel a munka

$W_{P0,P2} = -\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_0) - E_{pot}(P_2) = E_{pot}(3;2;6) - E_{pot}(3;2;9) = 36 - 135 = \mathbf{-99\ J}$.

VAGY: ♠→ választhatunk egyszerűbb utat, mint a fenti két szakaszból összetett út; jelen esetben a P_0-t és P_2-t összekötő út a z tengellyel párhuzamos (tehát dx = dy = 0):

$W_{P0,P2} = \int_{(3,2,6)}^{(3,2,9)} F_z\,dz = \int_{(3,2,6)}^{(3,2,9)} (2x^2 - xy - 2xz)dz = \int_6^9 (2\cdot 3^2 - 3\cdot 2 - 2\cdot 3z)dz =$

$= \int_6^9 (12 - 6z)\,dz = [12z - 3z^2]_6^9 = -99\ \mathrm{J}$

Természetesen kiszámolható a munka az eredeti úton megadott vonalintegrállal is.

A $P_0 \rightarrow P_1$ szakaszra t_0=0 és t_1=1 választással $\mathbf{r_1}(t) = (3+2t)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (6+1{,}5t)\mathbf{k}$; $\mathbf{dr_1} = (2\mathbf{i} + 1{,}5\mathbf{k})\,dt$;

$W_{P0,P1} = \int_0^1 \{[4\cdot(3+2t)\cdot(6+1{,}5t) - 2\cdot(6+1{,}5t) - (6+1{,}5t)^2]\cdot 2 + [2\cdot(3+2t)^2 - (3+2t)\cdot 2 - 2\cdot(3+2t)\cdot (6+1{,}5t)]\cdot 1{,}5\}\,dt = \cdots$

majd hasonlóan a második szakaszon…

2. Az egyik előfeladat egy aszimmetrikus mérleghinta elkészítése volt. Ehhez a Foghíjas FormalinFüggők csapata a mérleghinta gerendáját Pt–Cr ötvözetből állította elő úgy, hogy az ötvöző elemek arányának egyenletes változásával a gerenda sűrűsége folyamatosan változott: az egyik végén 7 kg/dm^3 volt, és egyenletesen nőtt a másik végén 21 kg/dm^3-ig. A gerenda hossza 6 m, keresztmetszete $\frac{8}{70}$ dm^2 volt.

a) Mekkora a gerenda tömege? **2 p.**

b) Hol van a gerenda tömegközéppontja? **2 p.**

c) A gerenda nagyobb sűrűségű végére ült Anikó, aki 50 kg. Ha azt szeretnénk, hogy a gerendát a közepén alátámasztva a mérleghinta egyensúlyban legyen, akkor hány kg-os embernek kell a másik végére ülnie? **2 p.**

MO. A sűrűség a gerenda mentén: $\rho(x) = \rho_0\left(1+\frac{2}{L}x\right)$, ahol $\rho_0 = 7$ kg/dm^3.

a) $M = \int_0^L A\cdot\rho_0\left(1+\frac{2}{L}x\right)\,dx = A\cdot\rho_0\left[x+\frac{x^2}{L}\right]_0^L = 2A\cdot\rho_0\cdot L = \mathbf{96\ kg}$.

b) $x_s = \frac{\int_0^L x\cdot A\cdot\rho_0\left(1+\frac{2}{L}x\right)dx}{M} = \frac{A\cdot\rho_0}{M}\int_0^L\left(x+\frac{2}{L}x^2\right)dx = \frac{A\cdot\rho_0}{2A\cdot\rho_0\cdot L}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3L}\right]_0^L = \frac{7}{12}L = \mathbf{3{,}5\ m}$.

c) x = 0-nál ismeretlen tömeg, x = x_s = 3,5 m-nél a gerenda tömege 96 kg, x = 6 m-nél Anikó 50 kg, és így a tömegközéppont x_s' = 3 m lesz: $3 = \frac{m\cdot 0+96\cdot 3{,}5+50\cdot 6}{m+96+50}$ → m = **66 kg**.

3. A Ch C14-ben a tanári asztalra kellett kilőni egy 3 kg-os sonkát a hatodik sorból egy rugó segítségével. A rugót a hatodik sorban az asztallaphoz rögzítették vízszintesen, úgy, hogy alapállapotban a vége éppen az asztal széléig érjen, majd 20 cm-rel összenyomták és ebben az állapotában egy zsineggel összekötötték. A zsineg által kifejtett erőt megmérték: 110 N volt. Ezután a sonkát (fóliában) a rugó elé helyezték és a zsineget elvágták. A rugó kilőtte a sonkát és az éppen a tanári asztalra érkezett. A tanári asztal 1 m-rel van a padló fölött és a hatodik sor asztala (a rugóval) még 1,2 m-rel magasabban van.
Töltsük ki az alábbi táblázatot! A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.
A helyzeti energiát **a padló szintjén** vegyük nullának!

	a sonka mozgási energiája	a sonka + rugó rendszer potenciális energiája	a sonka + rugó rendszer mechanikai energiája
a rugó összenyomott állapotában	0	77 J	77 J
amikor a rugó 10 cm-rel van összenyomva	8,25 J	68,75 J	77 J
amikor a sonka az asztal szélére ér	11 J	66 J	77 J
amikor a sonka 1 m-rel van a tanári asztalnál magasabban	17 J	60 J	77 J
amikor a sonka a tanári asztalra csapódik	47 J	30 J	77 J

7 p.

MO.
A rugóállandó k = 110 / 0,2 = 550 N/m.
Első sor:
A rugóban tárolt energia 20 cm-rel összenyomott állapotban: $E_{pot,r}$ = ½ kx^2 = ½ ·550·0,2^2 = 11 J.
Ekkor a sonka még áll, a mozgási energiája 0.
Mivel a sonka ekkor 2,2 m magasan van, $E_{pot,g}$ = 3·10·2,2 = 66 J,
a potenciális energiák összege E_{pot} = 77 J, és ennyi az összes mechanikai energia is, E_{mech} = 77 J.
Mivel a súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható, E_{mech} = 77 J a továbbiakban is.
Második sor:
A rugóban tárolt energia 10 cm-rel összenyomott állapotban: $E_{pot,r}$ = ½ kx^2 = ½ ·550·0,1^2 = 2,75 J.
A sonka+rugó rendszer összenergiája állandó: ½ ·550·0,2^2 = ½ ·550·0,1^2 + E_{kin} → E_{kin} = 8,25 J.
A sonka még mindig 2,2 m magasan van, $E_{pot,g}$ = 3·10·2,2 = 66 J,
a potenciális energiák összege E_{pot} = 68,75 J.
Harmadik sor:
A rugóban tárolt energia 0, a sonka+rugó rendszer összenergiája állandó, ezért E_{kin} = 11 J.
A sonka még mindig 2,2 m magasan van, $E_{pot,g}$ = 3·10·2,2 = 66 J, az összes potenciális energia E_{pot} = 66 J.
Negyedik sor:
Innentől az összes mechanikai energia a sonka mozgási és helyzeti energiája között oszlik meg.
2 m magasan $E_{pot,g}$ = 3·10·2 = 60 J, így a mozgási energia E_{kin} = 17 J.
Ötödik sor:
1 m magasan $E_{pot,g}$ = 3·10· 1 = 30 J, így a mozgási energia E_{kin} = 47 J.

4. A feladat az volt, hogy a csapatok a vendégként meghívott 90 kg-os oktatót minél távolabbra lökjék a kollégium folyosóján úgy, hogy leültetik a földre, egyvalaki nekifut, elkapja, és együtt csúsznak (rugalmatlan ütközésüket követően), amíg a súrlódás meg nem állítja őket. A csúszási súrlódási együttható 0,11. A Martos Martalócok és a Szeretemafizikát csapatok csaptak össze ebben a feladatban. Mindkét csapat az oktatót 4,4 m/s kezdősebességgel tudta megindítani. A Szeretemafizikát csapat viszont kitalálta azt, hogy a folyosót fellocsolja étolajjal az oktató előtt egy 1 m hosszú szakaszon, így ott a súrlódási együttható a felére csökken.

a) Milyen messze juttatta a Martos Martalócok az oktatót? **2 p.**

b) Milyen messze juttatta a Szeretemafizikát az oktatót? **3 p.**

A Szeretemafizikát csapatból a 80 kg-os Tóbiás volt az, aki nekifutott az oktatónak.

c) Mekkora volt a sebessége az oktatóhoz érkezéskor? **1 p.**

MO.

a) Munkatétellel: $\Delta E_{kin} = ½\, M\,(0 - v_0^2) = W_{össz} = W_{súrl} = -\mu Mg\cdot s_{MM}$, ahol $\mu_0 = 0{,}11$, $v_0 = 4{,}4$ m/s

→ $s_{MM} = v_0^2/(2\mu_0 g) =$ **8,8 m**

b) Az első 1 m-re: $½\, M\,(v_1^2 - v_0^2) = -\mu_1 Mg\cdot s_1$, ahol $\mu_1 = 0{,}055$, $v_0 = 4{,}4$ m/s, $s_1 = 1$ m

→ $v_1^2 = v_0^2 - 2\mu_1 g s_1 = 18{,}26\ m^2/s^2$;

A maradék útra: $½\, M\,(0 - v_1^2) = -\mu_0 Mg\cdot s_2$, ahol $\mu_0 = 0{,}11$ → $s_2 = 8{,}3$ m; $s_{SZF} = 8{,}3+1 =$ **9,3 m**

c) Impulzus-megmaradást felírva a rugalmatlan ütközésre az u sebességű, $m_T = 80$ kg tömegű Tóbiás és az álló (pontosabban ülő) M = 90 kg tömegű oktató között, ha az ütközés utáni sebességük $v_0 = 4{,}4$ m/s:

$m_T\cdot u + 0 = (m_T + M)\cdot v_0$ → $u = (m_T + M)/ m_T \cdot v_0 =$ **9,35 m/s**.