Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat
Szent György-napi zh2 2015. ápr. 24. megoldás

Az összes feladatban g = 10 m/s^2.

1. Szent György találkozott egy háromfejű repülő sárkánnyal. A sárkány mindig úgy mozgatta a fejeit, hogy a szíve a testének a tömegközéppontjában legyen. Megtudta ezt Szent György, így gyorsan kiszámolta, hol a sárkány szíve, odaszúrt a lándzsájával és megölte a sárkányt. A számoláshoz Szent György a sárkány törzsét, két szárnyát és három fejét vette figyelembe (ezekhez képest a lábai és a nyakai elhanyagolható tömegűek voltak). Egy jobbsodrású Descartes koordinátarendszert képzelt el, melynek az origója az ő bal nagylábujja, ebben az egyes részek tömegközéppontjának koordinátái a következők voltak:

törzse	m_1 = 100 kg	x_1 = 1,8 m	y_1 = –1,8 m	z_1 = 1,7 m
jobb szárnya	m_2 = 20 kg	x_2 = 3,2 m	y_2 = –1,2 m	z_2 = 2,4 m
bal szárnya	m_3 = 20 kg	x_3 = 0,6 m	y_1 = –2,2 m	z_3 = 2,6 m
első feje	m_4 = 20 kg	x_4 = 0,6 m	y_4 = 0,6 m	z_4 = 2,0 m
második feje	m_5 = 20 kg	x_5 = 0,6 m	y_5 = –0,6 m	z_5 = 2,0 m
harmadik feje	m_6 = 20 kg	x_6 = –0,6 m	y_6 = –0,6 m	z_6 = 2,0 m

a) Számoljuk ki a sárkány szívének a koordinátáit! **3 p.**
b) Mennyivel tolódik odébb a sárkány tömegközéppontja, ha Szent György levágja a harmadik fejét? **3 p.**

MO.
a) $\mathbf{r}_s = \Sigma m_i \mathbf{r}_i / \Sigma m_i$: a teljes sárkány tömegközéppontja $\mathbf{r}_{s6}$ = 1,34 **i** – 1,3 **j** + 1,95 **k** [m]

b) Ha elveszti a harmadik fejét, de különben nem mozdul meg: $\mathbf{r}_{s5} = 1,\dot{5}\,\mathbf{i} - 1,3\dot{7}\,\mathbf{j} + 1,9\dot{4}\,\mathbf{k}$ [m];

a maradék két fejével $|\boldsymbol{r}_{s5} - \boldsymbol{r}_{s6}|$ ≈ 0,23 m-rel tolódott el a tömegközéppontja a szívétől.

2. A sárkány készített egy csapdát a barlangja bejáratánál: egy faágra 9 m magasságban ráerősített egy 5 m hosszú rugót, majd azt lehúzta a földig, és a végére tett egy akkora követ, amivel éppen lehúzva maradt a rugó: ehhez 8 kg-os kőre volt szükség. Szent György 2 kg-os csivavája éppen arra szaladgált, nem vette észre a csapdát, lerúgta a követ, fennakadt a rugón, és most ott rezeg szegény a rugó végén.
a) Mekkora periódusidővel rezeg a csivava? **1,5 p.**
b) Milyen magasságban lenne egyensúlyban a csivava a rugó végén? **1 p.**
c) Mekkora amplitúdóval rezeg a csivava? **1 p.**
d) Mekkora a sebessége a csivavának akkor, amikor 4 m magasan van a föld felett? **3 p.**

MO.
a) A 8 kg-os kővel a megnyúlás $\Delta\ell$ = 9–5 = 4 m, tehát a rugóállandó k = mg/$\Delta\ell$ = 20 N/m.

A periódusidő $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{20}} = 1{,}987 \approx 2\ \mathrm{s}$.

b) mg = k·$\Delta\ell_{es}$ → $\Delta\ell_{es}$ = 1 m, vagyis 9–(5+1) = 3 m magasságban.

c) Mivel a kezdősebesség 0, az amplitúdó a kiindulási pont és az egyensúlyi pont távolsága lesz, A = 3 m.

d) Energiamegmaradással: legyen z = 0 ott, ameddig lelóg a rugó nyugalmi állapotban, vagyis 4 m magasan.

Így kiinduláskor z_0 = –4 m, a kérdéses pontban pedig z_1 = 0.

mgz + ½ k·$\Delta\ell^2$ + ½ mv^2 = konst.: 2·10·(–4) + ½·20·4^2 + 0 = 0 + 0 + ½·2v^2 → v = $\sqrt{80}$ ≈ 8,9 m/s.

3. A sárkány a varázserejével létrehozta az alábbi erőteret, aminek segítségével a lakomáját mozgatni tudja:

E = (y^2z – 2 yz) **i** + (p xyz – 2 xz) **j** + (xy^2 – 2 xy) **k** [N/kg] ;

ez a Húst Emelve Vivő erőtér, röviden HEVerő.

x, y és z m-ben értendőek; p egy paraméter, melynek értékét a sárkány minden nap más értékre állítja.
A sárkány egy 8 kg-os szűzpecsenyét először az y tengellyel párhuzamosan bevitet a barlangjába a P_0 (3, 1, –1) [m] kiindulási pontból a P_1 (3, 0, –1) m pontba, majd ott felemelteti az üstjébe a z tengellyel párhuzamosan a P_2 (3, 0, 1) m végpontba.
a) Mekkora munkát végzett a HEVerő? **4 p.**
b) Mi az a p érték, amivel a HEVerő-tér konzervatív? **2,5 p.**

MO. Először nézzük meg, konzervatív-e az erőtér:

$$\textbf{b) } \mathbf{rot\,E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z - 2yz & pxyz - 2xz & xy^2 - 2xy \end{vmatrix} =$$

$$= \big(2xy - 2x - (pxy - 2x)\big)\mathbf{i} - \big(y^2 - 2y - (y^2 - 2y)\big)\mathbf{j} + \big(pyz - 2z - (2yz - 2z)\big)\mathbf{k} =$$

$$= (2 - p)xy\,\mathbf{i} + (p - 2)yz\,\mathbf{k} = (2 - p)\,[xy\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{k}]\ .$$

Az erőtér tehát csak p = 2 értékre konzervatív.

a) Tetszőleges p értéknél a munkát a fent megadott útra kell kiszámolni:

$$(3,1,-1) \overset{dy}{\rightarrow} (3,0,-1) \overset{dz}{\rightarrow} (3,0,1):$$

$$\frac{W_{P0,P2}}{m} = \int_{3,1,-1}^{3,0,-1}(pxyz - 2xz)\,dy + \int_{3,0,-1}^{3,0,1}(xy^2 - 2xy)\,dz = \int_{-1}^{0}(-3py + 6)\,dy + \int_{-1}^{1} 0\,dz = \frac{3p}{2} - 6\ \frac{J}{kg}$$

A 8 kg-os szűzpecsenye esetén a munka $W_{P0,P2}$ = 12p–48 J.

4. Napjainkban Szent György többek között a rendőrök védőszentje, ezért a rendőröknek ez a nap szabadnap. Ennek tudatában az autósok sokkal vadabbul kezdtek vezetni és sok baleset is történt.
a) Sárkányék például kipróbálták, mekkora végsebességre gyorsul fel a kocsijuk egy 10°-os nagyon-nagyon hosszú lejtőn lefelé, ha akkora gázt adnak (vagyis a motor akkora erőt fejt ki), amivel vízszintes terepen éppen 50 km/h-val mennének. A gördülési súrlódási együttható 0,02; négyzetes közegellenállást figyelembe véve a közegellenállási együttható 1,5 kg/m. Sárkányék kocsija a benne ülő családdal együtt 1800 kg.
Mekkora lett a végsebességük? **3 p.**
b) A Szent család szabályosan 50 km/h sebességgel ment az úton. A György család viszont gyorsabban ment és ráadásul el is bambultak, így hátulról beleütköztek a Szent család autójába. A két kocsi teljesen összeroncsolódott és egy roncsként csúszott tovább még 40 m-t, amíg megállt. Szenték autója családostul 1200 kg, Györgyék autója családostul 1600 kg volt, a csúszási súrlódási együttható 0,6.
Mekkora sebességgel ütköztek Györgyék Szentéknek? **3 p.**

MO.
a) Vízszintesen: $ma = 0 = F_m - \mu mg - kv_1^2 \ \rightarrow\ F_m = \mu mg + kv^2 = 0{,}02\cdot1800\cdot10 + 1{,}5\cdot(50/3{,}6)^2 \approx 649{,}35$ N.

A lejtőn lefelé: $ma = 0 = F_m + mg\cdot\sin\alpha - \mu mg\cdot\cos\alpha - kv_2^2 \ \rightarrow$

$kv_2^2 = F_m + mg\cdot\sin\alpha - \mu mg\cdot\cos\alpha \approx 649{,}35 + 3125{,}67 - 354{,}53 \approx 3420{,}49$ N $\ \rightarrow\ v_2 \approx 47{,}75$ m/s ≈ 172 km/h.

b) A roncs ütközés utáni kezdősebessége munkatétellel számolható a súrlódási erő munkájából:

$0 - ½\,(m_1+m_2)\,v^2 = -\mu(m_1+m_2)g\cdot s$, azaz $½\cdot2800\cdot v^2 = 0{,}6\cdot2800\cdot10\cdot40 \ \rightarrow\ v \approx 21{,}9$ m/s ≈ 78,87 km/h.

Az ütközés tökéletesen rugalmatlan volt, impulzusmegmaradást felírva:

$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1+m_2)\,v$, azaz $1200\cdot(50/3{,}6) + 1600u_2 = 2800\cdot21{,}9 \ \rightarrow\ u_2 \approx 27{,}9$ m/s ≈ 100,5 km/h.