Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat zh2 2016. máj. 6. megoldások

1. A PU239-es naprendszerben lévő Töhötöm bolygón különös erők hatnak. Az űrhajósok az erőtér-mérőjükkel meghatározták, hogy az erőtér az alábbi függvénnyel írható le:

$\mathbf{E} = (3-2y)\,\mathbf{i} - 2(x+yz)\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ [N/kg] .

A nepáli űrhajós 1,5 kg-os vizespalackja az $\mathbf{r} = (t^2+1)\,\mathbf{i} + (t-1)\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$ [m] görbe mentén a P_0 (2,–2,–2) [m] pontból a P_1 (2,0,2) [m] pontba mozdult el.

a) Mekkora munkát végzett eközben az erőtér a vizespalackon? 4 p.

b) Számoljuk ki az erőtér rotációját és állapítsuk meg, hogy konzervatív-e az erőtér! 2 p.

MO.

b) $\mathbf{rot\,E} = (-2y-(-2y))\,\mathbf{i} - (0-0)\,\mathbf{j} + (-2-(-2))\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$ → konzervatív

a) a potenciálfüggvény $U = 2xy + y^2z - 3x$ →

$U(P_0) = -22$ J/kg, $U(P_1) = -6$ J/kg, $W/m = -16$ J/kg, $W = -24$ J.

Vagy számolható a munka az eredeti görbe menti vonalintegrállal, vagy más utat választva is.

2. Az űrhajósok rendelkezésére áll egy 1,4 m hosszú, 25 N/m rugóállandójú rugó, aminek egyik vége a súrlódásmentes padlón az űrhajó falához van rögzítve, a másik végéhez egy 4 kg tömegű súlyzót erősítettek, azzal tudják meghúzni a rugót az űrhajósok. A nyugalomban lévő rugót a tuszi űrhajós meghúzza 0,4 m-nyit, majd a hutu űrhajós további 0,2 m-nyit.

a) Melyikük végzett több munkát? 2 p.

A 0,6 m-nyit kihúzott rugót elengedik, így a súlyzó az űrhajó súrlódásmentes padlóján rezgőmozgásba kezd.

b) Milyen távol lesz a súlyzó a faltól az elengedés után 6 s-mal? 3 p.

c) Mekkora lesz a súlyzó maximális sebessége? 1 p.

MO.

a) a rugó által végzett munka $W_r = -\Delta E_{pot} = E_{pot}(x_1) - E_{pot}(x_2) = ½kx_1^2 - ½kx_2^2$,

az űrhajósok által végzett munka $W = -W_r = \Delta E_{pot} = E_{pot}(x_2) - E_{pot}(x_1) = ½kx_2^2 - ½kx_1^2$,

tuszi: $x_{t1} = 0$, $x_{t2} = 0{,}4$ m → $W_{tuszi} = ½\cdot 25\cdot 0{,}4^2 - 0 = 2$ J

hutu: $x_{h1} = 0{,}4$ m, $x_{h2} = 0{,}6$ m → $W_{tuszi} = ½\cdot 25\cdot 0{,}6^2 - ½\cdot 25\cdot 0{,}4^2 = 2{,}5$ J, tehát ő végzett több munkát.

b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = 2{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$.

Mivel kezdősebesség nélkül indul, $A = x_0 = 0{,}6$ m és $\varphi_0 = 0$, tehát

a kitérés $x(t) = 0{,}6\cos(2{,}5t)$ [m],

a faltól való távolság $y(t) = 1{,}4 + 0{,}6\cos(2{,}5t)$ [m].

t = 6 s -ban $y(t) = 1{,}4 + 0{,}6\cos(15) = 1{,}4 - 0{,}4558 = 0{,}9442$ [m].

c) $v(t) = -0{,}6\cdot 2{,}5\sin(2{,}5t)$ [m/s], a maximális sebesség $v_{max} = A\omega = 1{,}5$ m/s.

3. Az űrhajóval bolygó körüli pályára álltak az űrhajósok a felszín felett 400 km-rel. A riói űrhajósnak eszébe jutott, hogy a bolygó felszínén hagyta a fényképezőgépét, ezért beszállt az egyszemélyes űrkabinba, hogy visszamenjen érte. A riói űrhajós az űrkabinnal együtt 8 t, induláskor 80 m/s kezdősebességgel rajtol a bolygó közepe felé az űrhajótól, ami 40 t (a benne maradt űrhajósokkal együtt).

a) Mekkora sebességgel érkezik meg a bolygó felszínére (ha nem kapcsol be fékezőrakétákat)? 3 p.

b) Mennyivel módosul az űrkabin távozása miatt az űrhajó felszín feletti magassága? 3 p.

A bolygó sugara 2000 km, a gravitációs gyorsulás értéke a bolygó felszínén 2 m/s^2.

A bolygónak nincsen légköre.

MO.

Energia-megmaradást felírva az általános gravitációs erő potenciális energiájával

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma\frac{m\cdot M_{bolygó}}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \gamma\frac{m\cdot M_{bolygó}}{r_2}.$$

A bolygó tömege és a γ értéke nem ismert, de tudjuk, hogy $g = \gamma\frac{M_{bolygó}}{R_{bolygó}^2}$ → $\gamma\cdot M_{bolygó} = g\cdot R_{bolygó}^2$.

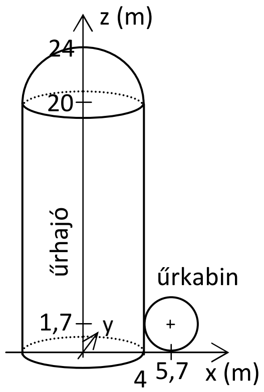
a) $v_{1,\text{űrkabin}} = 80$ m/s, $r_1 = R_{\text{bolygó}} + 400$ km $= 2{,}4\cdot10^6$ m, $r_2 = R_{\text{bolygó}} = 2\cdot10^6$ m $\rightarrow$ $v_2 = 1157$ m/s.

b) Impulzus-megmaradással $m_{\text{űrkabin}}\cdot v_{1,\text{űrkabin}} = m_{\text{űrhajó}}\cdot v_{1,\text{űrhajó}}$ $\rightarrow$ $v_{1,\text{űrhajó}} = 16$ m/s,

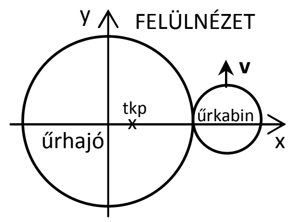
$r_1 = R_{\text{bolygó}} + 400$ km $= 2{,}4\cdot10^6$ m, $r_2 = R_{\text{bolygó}} + 400$ km $+ \Delta h = 2{,}4\cdot10^6$ m $+ \Delta h$ $\rightarrow$ $\Delta h = 92{,}16$ m.

(Ez a pálya nem lesz körpálya, mivel az űrhajó kerületi sebessége nem változott.)

[$E_{pot} = mgh$ -val számolva $v_2 = 1267$ m/s és $\Delta h = 64$ m, ez így 2 pontot ér.]



4. Az űrhajó egy 20 m hosszú, 4 m sugarú, 36 t tömegű hengerből és az egyik végéhez csatlakozó 4 t tömegű félgömbből áll. A henger és a félgömb is homogénnek tekinthető, a félgömb tömegközéppontja 3/8 R távolságra van a hengerrel közös lapjától. A riói űrhajós visszaérkezik az űrhajóhoz a 8 t tömegű, 1,7 m sugarú gömb alakú (szintén homogénnek tekinthető) űrkabinjával, és az űrhajó tengelyére merőleges 8 m/s sebességgel dokkol az ábra szerint.



a) Hol van az űrhajó + űrkabin együttes tömegközéppontja? 2 p.

b) Mekkora az űrhajó + űrkabin tehetetlenségi nyomatéka az űrhajó tengelyére (a z tengelyre)? 2 p.

c) Mekkora az űrhajó + űrkabin tehetetlenségi nyomatéka arra a tengelyre, ami az űrhajó tengelyével párhuzamos és a közös tömegközéppontjukon megy át? 1 p.

Henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére $\frac{1}{2}mR^2$;

gömb és félgömb tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére $\frac{2}{5}mR^2$.

d) Az űrkabin a dokkoláskor forgásba hozza az addig nem forgó űrhajót. Mekkora lesz a forgás szögsebessége? 2 p.

MO.

a) $x_s = 5{,}7\cdot8 / (4+36+8) = 0{,}95$ m; $y_s = ((20+3/8\cdot4)\cdot4+10\cdot36+1{,}7\cdot8)/(4+36+8) = 9{,}575$ m.

b) $\Theta_z = \Theta_{\text{henger},s} + \Theta_{\text{félgömb},s} + (\Theta_{\text{gömb},s} + m_{\text{gömb}}\cdot d^2)$

$\Theta_z = \frac{1}{2}\cdot36\cdot10^3\cdot4^2 + \frac{2}{5}\cdot4\cdot10^3\cdot4^2 + (\frac{2}{5}\cdot8\cdot10^3\cdot1{,}7^2 + 8\cdot10^3\cdot(4+1{,}7)^2) = 582768\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

c) A tömegközépponti tengely $x_s = 0{,}95$ m-rel van eltolva a z tengelyhez képest:

$\Theta_s = \Theta_z - m_{\text{össz}}\cdot x_s^2 = 582768 - 48\cdot10^3\cdot0{,}95^2 = 539448\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

(vagy számolható részenként Steiner-tétellel)

d) Impulzusmomentum-megmaradással: $m_{\text{űrkabin}}\cdot v_{\text{űrkabin}}\cdot k = \Theta\cdot\omega$.

Az űrhajó + űrkabin a közös tömegközéppontjukon átmenő tengely körül fog forogni,

ezért $k = 5{,}7 - 0{,}95 = 4{,}75$ m és $\Theta = \Theta_s$ $\rightarrow$ $\omega = 0{,}5635\ \text{s}^{-1}$.

(Mivel az űrkabin nem az űrhajó tömegközéppontjának magasságában csatlakozott az űrhajóhoz, ezért a forgástengely nem teljesen párhuzamos a z tengellyel, de ezt elhanyagoljuk.)