Számolási gyakorlat

Wittmann Mária
Volford András

2004. október 6.

I.

Kinematika

Általános feladatok, koordinátarendszer alkalmas választása.

I.1.

Egy motorcsónak a folyón felfelé halad, és szembetalálkozik egy tutajjal. A találkozás után 1 órával a motor elromlik. A javítás fél órát vesz igénybe, és utána a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral – lefelé megy. Az első találkozás helyétől 7,5 km-re éri utol a tutajt.

Mennyi a folyó sebessége? (Tételezzük fel, hogy a motorcsónak a folyóhoz képest állandó sebességgel halad, a tutaj pedig a folyóval együtt mozog.)

Megoldás:

A feladat megoldható (a) a parthoz rögzített, (b) a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

a. A koordinátarendszerünk x tengelyét helyezzük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az x tengely pozitív értékei legyenek azok, amerre a víz (és a tutaj) mozognak. A motorcsónak és a tutaj helyzetének x koordinátáját írjuk fel a második találkozásig.

   Motorcsónak:

   $$1 \cdot (v_f + v_{cs}) + 0,5 \cdot v_f + t \cdot (v_f - v_{cs}) = 7,5$$

   ahol v_f a folyó sebessége a parthoz képest (pozitív), v_{cs} a motorcsónak sebességének nagysága a parthoz képest (pozitív ill. negatív attól függően, hogy a csónak a pozitív vagy negatív x tengely irányába mozog), t az az idő, amíg a csónak a folyón lefelé halad bekapcsolt motorral.

   Tutaj:

   $$(1 + 0,5 + t) \cdot v_f = 7,5$$

   A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van. Átrendezve őket

   $$(1 + 0,5 + t) \cdot v_f + (1 - t) \cdot v_{cs} = 7,5 + (1 - t) \cdot v_{cs} = 7,5 \rightarrow t = 1h, v_f = 3km/h$$

   A csónak sebessége tetszőleges lehet.

b. A koordinátarendszerünk origója legyen a tutajra rögzítve, az x tengely pozitív iránya mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól. Ekkor a tutaj x koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak x koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

   $$1 \cdot v_{cs} + t \cdot (-v_{cs}) = 0$$

Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órát távolodik a tutajtól v_{cs} sebességgel és utána ugyancsak v_{cs} sebességgel közeledik hozzá, a közeledés ideje is 1 óra, másrészt hogy a csónak sebessége tetszőleges.

I.2.

Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel. Milyen időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

Megoldás:
A koordinátarendszerünket helyezzük az egyik villamosra; ez a koordinátarendszer c-vel mozog az úttesthez képest. A szomszédos villamos távolsága cT, ekkora utat kell a gépkocsinak megtennie a villamoshoz képest. Mivel a gépkocsi sebessége az úttesthez képest v, a villamoshoz rögzített koordinátarendszerben $v - c$, azaz

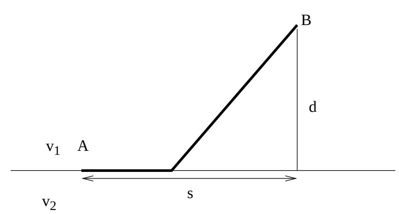
ha $v > c$ (egy irányba haladnak és a gépkocsi gyorsabb), akkor $(v - c)$-vel halad a gépkocsi az előttük menő villamos felé és $t = cT/(v - c)$ alatt éri el;

ha $c > v > 0$ (egy irányba haladnak és a villamos gyorsabb), akkor $(c - v)$-vel közeledik a gépkocsi a mögöttük menő villamos felé és $t = cT/(c - v)$ alatt éri el;

ha $v < 0$ (ellenkező irányba haladnak), akkor $(v + c)$-vel közeledik a gépkocsi a mögöttük menő villamos felé és $t = cT/(v + c)$ alatt éri el.

I.3.

Egy ember a tóparton levő A pontból a *legrövidebb idő* alatt szeretne a tóban fekvő B pontba érni. Milyen útvonalat válasszon, ha maximális futási sebessége v_f, úszási sebessége pedig v_u? A B pontból a partra húzott merőleges talppontját P-vel jelölve $\overline{AP} = s$, $\overline{BP} = d$.



Megoldás:
Az út két szakaszból áll, először $|s - x|$ távolságot fut a parton, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út $\sqrt{x^2 + d^2}$. Számoljunk először csak azzal az esettel, amikor $s - x$ pozitív:

$$t(x) = t_f + t_u = \frac{s - x}{v_f} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v_u}$$

Azt az x értéket keressük, ahol t-nek minimuma van:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_f} + \frac{x}{v_u\sqrt{x^2 + d^2}} = 0 \text{ amiből } x = \frac{v_u}{\sqrt{v_f^2 - v_u^2}}.$$

Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha $v_f > v_u$ (ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon). Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy $s - x$ pozitív, $x \leq s$, azaz:

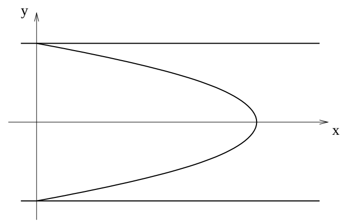
$$\frac{v_u}{\sqrt{v_f^2 - v_u^2}} d \leq s \Rightarrow \frac{v_f^2}{v_u^2} \geq 1 + \frac{d^2}{s}$$

Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.

I.4.

Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen (a partra merőlegesen tartva a csónak tengelyét), a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vizének sebességeloszlása parabolikus:

$$u = u_0\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$



- Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!
- Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér?

Megoldás:
A folyó vize az x tengely irányában folyik, azaz

$$\frac{dx}{dt} = u_0\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

a csónak sebessége az y tengely irányába mutat:

$$\frac{dy}{dt} = v$$

.

A kettő hányadosa megadja a pálya érintőjét:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_0}{v}\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

Ez a differenciálegyenlet szeparálható. A kezdeti feltétel: a csónak az x = 0, y = - L/2 pontból indul:

$$\int_0^x dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{y} \frac{u_0}{v}\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right),$$

amiből a pálya egyenlete

$$x = \frac{u_0}{v}\left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3}\right)$$

Ha a csónak átér a túlsó partra, akkor $y = L/2$, és $x\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{u_0}{v}\frac{2}{3}L$

(Mivel a folyó vizének sebességeloszlása az $y = 0$-ra szimmetrikus, a lesodródás a túlsó partig kétszer annyi, mint a folyó közepéig - így gyorsabban számolható.)

I.5.

A és B város egy egyenes partú víz partján helyezkednek egymástól d távolságra. Egy (vízhez képest) $v_c s$ sebességű motorcsónakkal elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba a lehető legrövidebb úton. Ugyanannyi idő kell-e ehhez, ha ez a bizonyos víz egy tó ill. egy v_f (állandó) sebességű folyó?

I.6.

A és B város $84km$-re vannak egymástól. Két biciklis indul el egy időben egymással szembe, az egyik A-ból B-be $16km/h$, a másik B-ből A-ba $12km/h$ sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból, és elrepül addig, amíg találkozik a B városból jövő biciklistával, akkor gyorsan visszafordul, elrepül az A-ból jövő biciklistáig, majd újra a B-ből jövőig, stb., stb. A fecske sebessége $150km/h$. Hány km-t tesz meg, amíg a két biciklista összetalálkozik az A és B közötti úton?

I.7.

Egy szekér gurul. Hossza vele egy irányba haladva a, szembe b lépés. Hány lépés hosszú ha áll?

II.

Anyagi pont I

Anyagi pont mozgásának leírása Descartes-féle koordinátarendszerben, r = r (t). Pillanatnyi és átlagsebesség, gyorsulás. Pálya. Vektorok.

II.1.

Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

$$r(t) = (at + b)\boldsymbol{i} + (at - b)\boldsymbol{j} + (-ct2 + 4at + 5b)\boldsymbol{k}$$

ahol $a = 3m/s$, $b = 10m$, $c = 5m/s^2$.

a. Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!

b. Mekkora a sebessége a t = 0 időpontban?

c. Milyen távol van az origótól a t = 0 időpontban?

d. Mely időben éri el a tömegpont az xy síkot?

e. Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

Megoldás:

a. $v(t) = \dot{r}(t) = a\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + (-2ct + 4a)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + (-10t + 12)\boldsymbol{k}$
$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) = -2c\boldsymbol{k} = -10\boldsymbol{k}$

b. $v(0) = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}$, nagysága $v(0) = 3\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} \approx 12,7m/s$

c. $r(0) = 10\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 50\boldsymbol{k}$, távolsága az origótól $d(0) = 10\sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2} \approx 52m$

d. az xy síkot akkor éri el, amikor $z = 0$, azaz $-5t2 + 12t + 50 = 0 \Rightarrow t_1 \approx 4,6s$
(és $t_2 = -2,2s$ -ban is ott volt)

e. A mozgás síkmozgás, ha $Ax + By + Cz + D = 0$ teljesül minden t-re,
azaz $A(at + b) + B(at - b) + C(-ct2 + 4at + 5b) + D =$
$= (-Cc)t2 + (Aa + Ba + Ca)t + (Ab - Bb + 5Cb + D) = 0$,
vagyis

$$\begin{aligned} &-Cc = 0 \Rightarrow C = 0 \\ &\left.\begin{aligned} Aa + Ba &= 0 \\ Ab + Bb + D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} B &= -A \\ D &= -2Ab \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Legyen $A = 1$, a sík egyenlete $x - y - 2b = 0$.

II.2.

Egy repülőgép mozgását az

$$r(t) = a\cos(t/t_0)\boldsymbol{i} + 2asin(t/t_0)\boldsymbol{j}$$

függvény írja le, ahol $a = 300m$, $t_0 = 2s$.

a. Milyen pályán mozog a repülőgép?

b. Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a $t = 0$ és a $t = 2s$ időben?

Megoldás:

a. $x(t) = a\cos(t/t_0) = 200\cos(0,5t)$

$y(t) = 2a\sin(t/t_0) = 400\sin(0,5t)$

Fejezzük ki a az első egyenletből $\cos(t/t_0)$-t, a másodikból $\sin(t/t_0)$-t.

Mivel $\cos(t/t_0)^2 + \sin(t/t_0)^2 = 1$, ezért $(x/a)^2 + (y/a)^2 = 1$, azaz egy ellipszisen mozog a repülőgép.

b. $v(t) = \dot{r}(t) = -a/t_0\sin(t/t0)\boldsymbol{i} + 2a/t_0\cos(t/t0)\boldsymbol{j} = -100\sin(t/2)\boldsymbol{i} + 200\cos(t/2)\boldsymbol{j}$

$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) = -a/t_0^2\cos(t/t0)\boldsymbol{i} - 2a/t_0^2\sin(t/t0)\boldsymbol{j} = -50\cos(t/2)\boldsymbol{i} - 100\sin(t/2)\boldsymbol{j}$

$t = 0$ -ban $\quad v(0) = 200\boldsymbol{j}, a(0) = -50\boldsymbol{i}, v(0)\cdot a(0) = 0 \Rightarrow$ merőlegesek

$t = 2s$ -ban $\quad v(2) = -100\sin 1\boldsymbol{i} + 200\cos 1\boldsymbol{j} = -84,15\boldsymbol{i} + 108,06\boldsymbol{j}$,

$a(2) = -50\cos 1\boldsymbol{i} - 100sin1\boldsymbol{j} = -27,02\boldsymbol{i} - 84,15\boldsymbol{j}$,

$$\cos(\alpha) = \frac{v(20a(2)}{|v(2)||a(2)|} = \frac{-84,15\cdot -27,02 + 108,06\cdot -84,15}{\sqrt{84,15^2 + 108,06^2}\cdot\sqrt{27,02^2 + 84,15^2}} = 0.53$$

$\Rightarrow \alpha = 2,18\,rad = 125^o$

II.3.

Két egymásra merőleges rezgés egyenlete:

$$x(t) = 3A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad x(t) = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Rajzoljuk le az eredő rezgés pályáját!

Megoldás:

$x(t)$-ből kifejezve $\sin(2\pi t/T) = x/(3A)$, $y(t)$-t átalakítva és $sin(2\pi t/T)$-t behelyettesítve

$$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -2A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -2A\frac{x}{3A} = -\frac{2}{3}x,$$

a pálya az $y = -2x/3$ egyenesnek a $P_1(-3A, 2A)$ és $P_2(3A, -2A)$ pontok közötti szakasza.

II.4.

Egy ágyúgolyó röppályájának pályafüggvénye:

$$r(t) = (at + b)\boldsymbol{i} + (gt^2 + ct + d)\boldsymbol{k}$$

ahol a kilövés a t = 0 s-ban történik, és $a = 5ms^{-1}$, $b = 100m$, $c = 10ms^{-1}$, $d = 200m$, $g = -5ms^{-2}$.

a. Honnan lőtték ki az ágyúgolyót?

b. Mekkora volt a kezd!sebesség?

c. Mekkora a gyorsulás?

d. Mennyi idő alatt érkezik a földre?

e. Hol és melyik időpillanatban merőleges a sebességvektor a gyorsulásvektorra?

Megoldás:

a. $t = 0s$-ban

$$r(0) = b\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{k} = 100\boldsymbol{i} + 200\boldsymbol{k}$$

b.

$$v(t) = \dot{r}(t) = a\boldsymbol{i} + (2bt + c)\boldsymbol{k} = 5\boldsymbol{i} + (-10t + 10)\boldsymbol{k},$$

$$v(0) = 5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{k}, v(0) = \sqrt{5^2 + 10^2} \approx 11,2m/s$$

c. $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) = 2b\boldsymbol{k} = -10\boldsymbol{k}$ (azaz szabadesés)

d. azaz a $z = 0$ síkot mikor éri el:

$$gt^2 + ct + d = -5t^2 + 10t + 200 = 0 \Rightarrow t = 7,4s$$

e. a két vektor ott merőleges, ahol a skalárszorzatuk nulla:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 50 + (-10t + 10)(-10) = 100(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1s,$$

$$r(1) = 105\boldsymbol{i} + 205\boldsymbol{k},$$

ez a pálya csúcspontja

(gyorsabban megoldható a feladat a $v_z = -10t + 10 = 0$ feltételből)

II.5.

Egy tömegpont gyorsulását az alábbi függvény adja meg:

$$a(t) = 4asin(\omega t + \phi_0)i + 4bsin\omega tj$$

ahol $\omega = 2s^{-1}$, $\phi_0 = \pi/2$

A test a $t_1 = \pi/4s$-ban az $r1 = ai - bj$ pontban van és sebessége $v_1 = 2ai$.

a. Adjuk meg $t_2 = 3s$-ban a test helyvektorát és a sebességét!

b. Mi a mozgás pályája?

Megoldás:

$$a_x = 4asin(2t + \pi/2) = 4acos2t = \dot{v}_x$$

$$v_x = 2asin2t + k_1$$

$$t1 = \pi/4sv_{1x} = 2a \Rightarrow k1 = 0, vx = 2asin2t = \dot{x}$$

$$x = -acos2t + k2$$

$$t1 = \pi/4sx_1 = a \Rightarrow k2 = a, x = -acos2t + a$$

$$a_y = 4bsin2t = \cdot v_y$$

$$v_y = -2bcos2t + k3$$

$$t1 = \pi/4sv_{1y} = 0 \Rightarrow k3 = 0, v_y = -2bcos2t = \dot{y}$$

$$y = -bsin2t + k4$$

$$t1 = \pi/4sy_1 = -bk4 = 0, y = -bsin2t$$

a.

$$r(3\pi) = -acos(6\pi + a)\boldsymbol{i} - bsin(6\pi)\boldsymbol{j} = 0,$$

$$v(3\pi) = 2asin(6\pi)\boldsymbol{i} - 2bcos(6\pi)\boldsymbol{j} = -2b\boldsymbol{j}$$

b.

$$x(t) = a - acos(2t) \Rightarrow cos(2t) = (a - x)/a$$

$$y(t) = -bsin(2t)\boldsymbol{j} \Rightarrow sin(2t) = -y/b$$

Felhasználva, hogy $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$: a pálya $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ellipszis

II.6.

II.6. Egy tömegpont gyorsulását az alábbi függvény adja meg:

$$a(t) = 3r\omega^2 sin\omega t\boldsymbol{i} + 4r\omega^2 sin(2\omega t + \pi/2)\boldsymbol{j}$$

ahol $\omega = 1s^{-1}$, $r = 2m$. A test a $t_0 = 0s$-ban az $r_0 = -2\boldsymbol{j}$ pontból indul $v_0 = -6\boldsymbol{i}$ sebességgel.

a. Mi a mozgás pályája?

b. Adjuk meg $t = 3s$-ban a sebesség nagyságát és irányát!

II.7.

II.7. Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$v(t) = 0,2e^{0,1t}\boldsymbol{i} - 2,8sin4t\boldsymbol{j} + (3 - 4t)\boldsymbol{k}$$

(Az időt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.)
Kipukkadásakor, $t = 0s$-ban a lufi az $r = 2\boldsymbol{i} + 1,4\boldsymbol{j} + 1,5\boldsymbol{k}$ pontból indult.

a. Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?

b. Mekkora távolságra van a kipukkadás helyétől?

c. Mekkora ekkor a gyorsulása?

d. A lufi egy olyan $3 \times 3 \times 3$ m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordinátarendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

III.

Anyagi pont II

Anyagi pont mozgásának leírása polárkoordináta-rendszerben

$$\boldsymbol{r}(t) = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi,$$

azaz $v_r = \dot{r}$, $v_t = r\dot{\phi} = r\omega$,
körmozgásnál $v_r = 0$, $v_t = r\omega$.

$$a(t) = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\boldsymbol{e}}_\phi =$$

$$\ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_r =$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi)$$

azaz $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$, $a_t = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\beta$
körmozgásnál $a_r = -r\omega^2$, $a_t = r\beta$.

III.1.

Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebességének felét. Hol áll meg?

Megoldás:

$$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\phi} = konst \Rightarrow \omega = \dot{\phi} = \omega_0 - \beta t \phi = \omega_0 t - \frac{\beta}{2}t^2$$

Először t_1 idő alatt:

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} = \omega_0 - \beta t \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

$$\pi = \omega_0 t_1 - \frac{\beta}{2}t_1^2$$

majd t_2 idő alatt:

$$0 = \frac{\omega_0}{2} - \beta t \Rightarrow t_2 = \frac{\omega_0}{2\beta} = t_1$$

$$\phi = \frac{\omega_0}{2}t_2 - \frac{\beta}{2}t_2^2$$

Ezekből:

$$\beta = \frac{3}{8}\frac{\omega_0^2}{\pi}$$

$$\phi = \frac{\omega_0}{2}\frac{\omega_0}{2\beta} - \frac{\beta}{2}\frac{\omega_0^2}{4\beta^2} = \frac{\pi}{3}$$

azaz még egy hatod kört tesz meg.

III.2.

Egy R sugarú kerék szíjáttétellel hajt egy tőle d távolságban levő kereket. Adjuk meg a két kerék azon pontjainak távolságát az idő függvényében, amelyek a t = 0 időpontban a legközelebb vannak egymáshoz!

III.3.

Állandó ω szögsebességgel forgó R sugarú tárcsa egy l hosszúságú csuklósan rögzített rúddal dugattyút mozgat. Határozzuk meg a dugattyú helyének időfüggését! Harmonikus rezgőmozgást végez-e a dugattyú?

III.4.

A kancsal fecske szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül. A fecske sebessége állandó (v). Odaér-e valaha a fészkére?

Megoldás:
Polárkoordináta-rendszerben

$$r = re_r, v = \dot{r} = e_r + r\dot{e}_r = \dot{r}e_r + r\dot{\phi}e_\phi,$$

azaz a sebesség radiális komponense $v_r = \dot{r}$, tangenciális komponense $v_t = r\dot{\phi}$.

Bontsuk fel a fecske sebességét radiális és tangenciális komponensre:

$$v_r = v\cos\alpha, v_t = v\sin\alpha,$$

ezzel

$$\dot{r} = v\cos\alpha \Rightarrow r = d - vt\cos\alpha,$$

a fecske távolsága a fészektől lineárisan csökken, és $t = d/(v\cos\alpha)$ idő alatt $r = 0$, a fecske beér a fészkébe!

$r\dot{\phi} = vsin\alpha$

(α a fecske kancsalságának szöge, ez konstans, ϕ a fészektől a fecskéhez t időben húzott sugárnak a 0 időben húzott sugárral bezárt szöge)

r-t behelyettesítve

$$(d - vt\cos\alpha)\frac{d\phi}{dt} = v\sin\alpha,$$

szeparálva

$$\int \frac{1}{d - vt\cos\alpha}dt = \frac{1}{v\sin\alpha}\int d\phi$$

és integrálva

$$\frac{1}{-v\cos\alpha}\ln\frac{d-vt\cos\alpha}{d}=\frac{\phi}{v\sin\alpha},$$

amiből

$$\phi=-\tan\alpha\ln\left(1-\frac{v\cos\alpha}{d}t\right).$$

$t\to\frac{d}{v\cos\alpha}$ esetén ez a függvény végtelenhez tart, vagyis a fecske végtelen sokat kering, amíg beér a fészkébe, de ezt véges idő alatt teszi!

Határozzuk meg a fecske pályáját!

Az egyik lehetőség, hogy az $r(t)$, $\phi(t)$ függvényekből kiküszöböljük t-t:

$$r=d-vt\cos\alpha\Rightarrow t=(d-r)/(v\cos\alpha)$$

és

$$\phi=-\tan\alpha\ln\left(1-\frac{v\cos\alpha}{d}\frac{d-r}{v\cos\alpha}\right)=-\tan\alpha\ln\frac{r}{d}$$

a másik lehetőség, hogy az (1) és (2) differenciálegyenletet elosztjuk egymással:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{rd\phi}{dr}=\frac{v\sin\alpha}{-v\cos\alpha}=-\tan\alpha,$$

szeparáljuk:

$$\int_0^\phi d\phi=-\tan\alpha\int_d^r\frac{1}{r}dr$$

és megoldjuk:

$$\phi=-\tan\alpha\ln\frac{r}{d}$$

Ez az ún. logaritmikus spirális egyenlete, melynek jellemzője, hogy egy-egy teljes fordulatot megtéve a középponttól mért távolság mértani sor szerint (mindig ugyanannyiad részére) csökken: r-et kifejezve

$$\phi(r)\text{-ből } r=de^{-\phi/\tan\phi},$$

$$\frac{r_1}{r_2}=e^{-\frac{\phi_2}{\tan\alpha}+\frac{\phi_t}{\tan\alpha}},$$

egy fordulatot megtéve $\phi_2=\phi_1+2\pi$, így $\frac{r_1}{r_2}=e^{-\frac{2\pi}{\tan\alpha}}=konst$

III.5.

R sugarú autókerékre rátapadt egy kavics. $t=0s$-ban a kavics pont az úttesten van ($z=0$). Az autó sebessége v.

Adjuk meg a kavics helyvektorát (sebességét, gyorsulását) az idő függvényében!

IV.

Mozgásegyenlet

IV.1.

Egy $m = 1g$ tömegű test a $t_1 = 2s$ időben az x tengely pozitív felén van az origótól $x_1 = 10cm$-re, sebessége a $+y$ tengely irányába mutat és nagysága $v_1 = 10cm/s$. A test a $t_2 = 5s$ időpontban a $P_2(-0,5cm, 15cm, 0)$ pontban van, a sebessége a $-x$ tengely irányába mutat és nagysága $v_2 = 7cm/s$. A testre állandó erő hat.

Mekkora az erő nagysága?

Mekkora a test sebessége a $t_3 = 8s$ időpontban, és hol lesz a test akkor?

Megoldás:
mivel $F = konst. \Rightarrow a = \dot{v} = \ddot{r} = F/m = konst. \Rightarrow$ kiintegrálva a sebesség és a helyvektor

$$v(t) = at + v(0), r(t) = \frac{1}{2}at^2 + v(0)t + r(0)$$

$$\begin{array}{lll} t_1 = 2s: & r(2) = \frac{1}{2}a2^2 + v(0)2 + r(0) = 0,1\boldsymbol{i}, & v(2) = a2 + v(0) = 0,1\boldsymbol{j} \\ t_2 = 5s: & r(5) = \frac{1}{2}a5^2 + v(0)5 + r(0) = -0,005\boldsymbol{i} + 0,15\boldsymbol{j}, & v(5) = a5 + v(0) = -0,07\boldsymbol{i} \end{array}$$

a sebességekből

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{0,07}{3}\boldsymbol{i} - \frac{0,1}{3}\boldsymbol{j} \text{ és } v(0) = v(t_1) - at_1 = v(t_2) - at_2 = \frac{0,14}{3}\boldsymbol{i}\frac{0,5}{3}\boldsymbol{j},$$

a helyvektorokból

$$r(0) = r(t_1) - 1/2\ at_1^2 - v(0)t_1 = r(t_2) - 1/2\ at_2^2 - v(0)t_2 = \frac{0,16}{3}\boldsymbol{i} - \frac{0,80}{3}\boldsymbol{j}.$$

Ezeket felhasználva

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{0,07^2 + 0,1^2} = \frac{\sqrt{0,0149}}{3} \approx 0,04m/s,$$

$$F = ma \approx 10^{-3}kg \cdot 0,04m/s = 4\,10^{-5}N,$$

$$\text{és } t_3 = 8s\text{-ban } v(8) = a8 + v(0) = -0,14\boldsymbol{i} - 0,1\boldsymbol{j},$$

$$v(8) = \sqrt{0,14^2 + 0,1^2} \approx 0,17m/s,$$

$$r(8) = \frac{1}{2}a8^2 + v(0)8 + r(0) = ... = -0,32\boldsymbol{i}[m]$$

IV.2.

Két anyagi pont, A és B kölcsönhatásban van egymással. Az A pontra még egy, az A-t és B-t összekötő egyenesre merőleges F_1 erő hat. A B pont gyorsulása a_B. Mennyi az A pont gyorsulása?

Megoldás:

Ha a B pont gyorsulása a_B, akkor a rá az A testtől ható erő $F_{BA} = m_B a_B$ (Newton II.), vagyis az A testre a B testtől ható erő $F_{AB} = -F_{BA}$ (Newton III.), és az A testre ható eredő erő $F_A = F_1 + F_{AB}$ (Newton IV.), melynek nagysága $F_A = \sqrt{F_1^2 + F_{AB}^2}$, mivel a két erő merőleges.

Ezekből az A test gyorsulásának nagysága $a_A = \dfrac{\sqrt{F_A^2 + (m_B a_B)}}{m_A}$.

IV.3.

Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő

a. mindig merőleges a test sebességére, akkor a test sebességének nagysága nem változik!

b. mindig egyező irányú a test sebességével, akkor a test sebességének iránya nem változik!

IV.4.

Egy m tömegű tömegpont mozog az xy síkban. A tömegpontra a sebességével arányos és arra merőleges erő hat, az arányossági tényező β. Az erő is benne van az xy síkban.

Írjuk fel a test mozgásegyenletét!

Milyen pályán mozog a test?

V.

Hajítások

A testre állandó erő hat, így a gyorsulása is állandó:

$$a = F/m = konst.$$

Mivel hajítás esetén a Földön

$$F = -mg\boldsymbol{k},$$

$$a = -g\boldsymbol{k} = \dot{v}$$

$$v = -gt\boldsymbol{k} + v0 = \dot{r}$$

$$r = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v_0}t + \boldsymbol{r_0}.$$

Forgassuk úgy a koordinátarendszerünk tengelyeit, hogy $\boldsymbol{v_0} = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0z}\boldsymbol{k} = v_0 \cos\alpha\boldsymbol{i} + v_0 \sin\alpha\boldsymbol{k}$ (a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge), és legyen $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{0}$,

ekkor

$$v = v_0 \cos\alpha\boldsymbol{i} + (v_0 \sin\alpha - gt)\boldsymbol{k},$$

$$r = v_0 t \cos\alpha\boldsymbol{i} + (v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{k}.$$

A hajítás pályája:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \Rightarrow t = x/(v_0 \cos\alpha),$$

$$z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha},$$

parabola.

A hajítás magassága:

z = max., amikor $v_z = 0 \Rightarrow t_h = v_0 \sin\alpha/g$, $h = z(t_h) = \dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$.

A hajítás távolsága (azonos z indulási és érkezési magasság esetén):

$d = 2t_h$ (mivel a pálya szimmetrikus), $d = x(t_d) = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}$;

vagy a pálya egyenletéből: $z = 0$, ha $x = v_0^2 \sin(2\alpha)/g$ (ill. x = 0 a kiindulási pont).

V.1.

Egy $360km/h$ vízszintes sebességű, magasan repülő repülőgépről kiejtenek egy tárgyat. Milyen kezdősebességgel kell $10s$-mal később egy másik tárgyak utánadobni, hogy $14s$ múlva találja el a kiejtett tárgyat?

Megoldás:
$v_r = 360km/h = 10m/s$, tegyük fel, hogy a gép az x tengely irányában repül:
az első test helyvektora

$$r_1(t) = r_0 + v_r t\boldsymbol{i}\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} = r_0 + 10t\boldsymbol{i}5t^2\boldsymbol{k},$$

a másodiké

$$r_2(t) = r_0 + v_r t\boldsymbol{i}\frac{1}{2}g(t-10)2\boldsymbol{k} = r_0 + 10t\boldsymbol{i} + [v(t-10)5(t-10)^2]\boldsymbol{k}$$

(a tárgy vízszintes sebessége nem változik, akár a gépen van, akár szabadon esik, mivel a közegellenállás elhanyagolható).

Mivel

$$r_1(14) = r_2(14),$$

$$5 \cdot 14^2 = v \cdot 4 - 5 \cdot 4^2$$

$$v = 225m/s$$

V.2.

Egy $h = 40m$ magas torony tetejéről 45^o-os szög alatt (felfelé) elhajítanak egy testet $v0 = 40m/s$ kezdősebességgel. Mekkora a távolság a kiindulási és földreérkezési pont között?

Megoldás: A test függőleges elmozdulása:

$$z(t) = h + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = 40 - 40\sin 45^o t - 5t^2,$$

földetéréskor

$$z(t^*) = 0$$

$$t^* = 6,83s$$

vízszintes elmozdulása:

$$x(t) = v_0 \sin\alpha t = 40\cos 45^o t,$$

földetéréskor

$$x(t^*) = 193,1m.$$

A távolság a kiindulási és földetérési pont között

$$d = \sqrt{40^2 + 193^2} \approx 1972m$$

V.3.

Két ferde hajítás kezdősebességének nagysága és a hajítás távolsága azonos. Az egyik hajítás maximális magassága a másikénak négyserese. Számítsuk ki a hajítási idők arányát!

Megoldás:

$$v_{01} = v_{02},$$

$$d_1 = v_{01}^2 \sin 2\alpha_1/g = d_2 = v_{02}^2 \sin 2\alpha_2/g$$

és

$$h_1 = v_{01}^2 \sin^2 \alpha_1/(2g) = 4h_2 = 4v_{02}^2 \sin^2 \alpha_2/(2g).$$

Az utóbbiból

$$\sin^2 \alpha_1 = 4 \sin^2 \alpha_2$$

$$\sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_2$$

$$\frac{t_{h1}}{t_{h2}} = \frac{\frac{v_{01} \sin \alpha_1}{g}}{\frac{v_{02} \sin \alpha_2}{g}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 2$$

(Az elsőt hozzávéve

$$\sin 2\alpha_1 = 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$$

$$2 \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$$

$$\alpha_1 = 63,4^o, \alpha_2 = 26,6^o,$$

de ez nem volt kérdés.)

V.4.

Béni áll az emeleti erkélyen. Abban a pillanatban, amikor Frédi kilép az utcára (sebessége $v_F = 1m/s$) Béni $v_0 = 2m/s$ sebességgel elhajít egy hógolyót.

a. Milyen szögben kell elhajítania, hogy a hógolyó Frédi fejére essen?

b. Mennyi idő múlva találja el?

c. A kaputól milyen távolságra találja el?

Megoldás:

a. A hajítás vizszintes irányú komponense meg kell hogy egyezzen Frédi sebességével:

$$v_{0x} = v_0 \cos(\phi) = v_F \Rightarrow \cos(\phi) = 0.5 \Rightarrow \phi = \pm 60^o$$

Tehát akár felfelé akár lefelé hajíthatta a hógolyót 60^o-os szögben.

b. A hógolyó függőleges irányú sebessége:

$$v_{0y} = v_0 \sin(\phi) \approx 1.732m/s$$

A hógolyó magassága az idő függvényében:

$$y = h + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

A földet $y = 0$-nál éri el.

$\phi = +60^o$ esetén:

$$y = 5 + 1.732t - \frac{10}{2}t^2 = 0 \Rightarrow t = 1.19s$$

$\phi = -60^o$ esetén:

$$y = 5 - 1.732t - \frac{10}{2}t^2 = 0 \Rightarrow t = 0.84s$$

c. A hógolyó távolsága az idő függvényében:

$$x = v_{0x}t$$

Behelyettesítve a repülési időt $\phi = +60^o$ esetén:

$$x = 1.19m$$

$\phi = -60^o$ esetén:

$$x = 0.84m$$

V.5.

Melyek azok a pontok, amelyekből elejtve az A golyót, az a 45^o-os lejtőről rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan?

Megoldás:
A lejtőre v^* sebességgel pattan a labda. Ez a sebesség h magasságból szabadeséssel jött létre:

$$h = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v^* = gt = \sqrt{2gh}$$

A lejtőről v^* sebességgel pattan tovább vízszintesen. Továbbá azt akarjuk, hogy pont a lejtő aljára érkezzen. Mivel a lejtő 45^o-os a pattanás után mind vízszintesen, mind függőlegesen ugyanannyi utat kell megtennie a labdának:

$$v^*t = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{2v^*}{g}$$

Ezalatt az idő alatt megtett út:

$$x = (z =)\frac{2v^{*2}}{g}$$

Ebből a vízszintes kezdeti sebesség:

$$v^* = \sqrt{\frac{g}{2}x}$$

Korábban kiszámoltuk, hogy h magasságból mekkora sebességre gyorsul fel a labda amikor a lejtőnek ütközik. Számoljuk ki v^* sebességre milyen magasságból gyorsul fel:

$$h = \frac{v^{*2}}{2g}$$

Behelyettesítve v^*-ot:

$$h = \frac{gx}{2}\frac{1}{2g} = \frac{x}{4}$$

Tehát a lejtőtől mindig $h = x/4$ magasságból kell indulnia a golyónak, ami a földtől:

$$z(x) = x + h = \frac{5x}{4}$$

V.6.

Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítai egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

Megoldás:

$$h = d$$

$$v_0^2 \sin^2 \alpha/2g = v_0^2 \sin 2\alpha/g$$

$$2sin2\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\tan \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 76^o$$

V.7.

A $200m$ magas (tűszerűen keskeny) hegy talppontjától $500m$-re lévő ágyú irányzékát milyen (legkisebb) szögre kell állítani, hogy a golyó átrepüljön fölötte?

Mennyi idő telik el, amíg a golyó a csúcs fölé ér?

A golyó kezdősebessége $v_0 = 1000m/s$.

V.8.

Egy függőlegesen feldobott kő sebessége $2s$ múlva $4m/s$.

Mekkora volt a kő kezdősebessége és milyen maximális magasságot ért el a kő?

V.9.

Egy lejtő legalsó pontjából, az origóból 60^o-os szögben eldobtunk egy golyót és az az előttünk levő lejtő $(4,3)$ pontjába érkezett.

Mekkora kezdősebességgel dobtuk el a golyót?

V.10.

Adott v_0 kezdősebességgel, h magasságból milyen szög alatt kell elhajítani egy testet, hogy az a lehető legmesszebb érjen földet?