Fizika számolási gyakorlat   2. rész

X.

Munkatétel, kinetikai energia tétele:

a test kinetikus energiájának megváltozása egyenlő a testre ható összes erő munkájával:

$$\Delta E_{kin} = W$$

A mechanikai energia megmaradásának tétele:

Konzervatív erőtérben a test kinetikus és potenciális energiájának összege állandó:

$$E_{kin} + E_{pot} = ½\, m\, v^2 + mgh = \text{konst.}$$

(Konzervatív erőtér: ld. a XI. fejezetben.)

(fgy. 1.42.)
Milyen magasra emelkedik a Hold felszínéről v_0 sebességgel függőlegesen kilőtt test? Mennyi legyen v_0, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét?
A Hold sugara 1888 km, a Hold felszínén a gravitációs gyorsulás 1,6 m/s^2.
Számítsuk ki a szökési sebesség értékét a Földre is!

(fgy. 1.47.)
RAJZ!!!
Asztallaphoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér. 10 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban). A rugó ilyen megfeszítéséhez 2,5 N erő szükséges. A végéhez egy 10 g-os golyót teszünk, majd elégetjük a cérnát. Az asztal 1,25 m magas.
Milyen sebességgel és a vízszinteshez képest milyen szögben csapódik a padlóra a golyó?
(A súrlódást hanyagoljuk el!)

(fgy. 1.48.)
Egy hengerről lelógó m tömegű, L hosszúságú kötelet feltekerünk egy hengerre.
Mekkora munkát végzünk eközben?
A súrlódástól tekintsünk el, és kezdetben a kötél felső vége a henger tengelyével egy magasságban legyen felfüggesztve.

(fgy. 1.50.)
Oldjuk meg az
1.26.a): „Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő mindig merőleges a test sebességére, akkor a test sebességének nagysága nem változik!”,
1.23. „m tömegű tömegpont mozog az xy síkban. A tömegpontra a sebességével arányos és arra merőleges erő hat, az arányossági tényező β. Az erő is benne van az xy síkban. Milyen pályán mozog a test?”,
1.42.: „Milyen magasra emelkedik a Hold felszínéről v_0 sebességgel függőlegesen kilőtt test? Mennyi legyen v_0, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét? A Hold sugara 1888 km, a Hold felszínén a gravitációs gyorsulás 1,6 m/s^2. Számítsuk ki a szökési sebesség értékét a Földre is!”
feladatokat a munka, kinetikus és potenciális energia fogalmaknak, valamint a rájuk vonatkozó tételeknek a felhasználásával!

Megoldás:
1.26.a) Munkatétellel: ha $\mathbf{F}\perp\mathbf{v}$, akkor az $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ skalárszorzat zérus (mivel $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$), így W = 0; eszerint viszont ΔE_{kin} = 0, vagyis $½\, mv^2$ = konst., vagyis v = konst.

(fgy. 1.49.)
Az $\mathbf{F} = ay\,\mathbf{i} - 4x^2b\,\mathbf{j} + (cx^2+dz)\,\mathbf{k}$ erőtérben (a, b, c, d konstansok) m tömegű pont mozog. A tömegpont a t_0 időpontban az $(x_0, y_0, 0)$ pontban van, sebessége $\mathbf{v}_0 = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{k}$. Mennyi a tömegpont mozgási energiája, és a mozgási energia időegység alatti megváltozása?

Megoldás:
$E_{kin} = ½\, m\, v^2 = ½\, m\, (v_1^2 + v_2^2)$
$dE_{kin} / dt = d(½\, m\, v^2) / dt = m \cdot v \cdot dv/dt = ma \cdot v = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = ay\, v_1 + (cx^2+dz)\, v_2$.

(fgy. 1.53.)
Hogy egy test a Földet elhagyhassa, kb. 11 km/s kezdeti sebességre van szüksége. Ha egy bolygóközi szondát 13 km/s sebességgel indítanak el, mekkora lesz a Földhöz viszonyított sebessége, amikor a Földtől már igen távol van?

(fgy. 1.54.)
10 m magas, 45° hajlásszögű lejtő tetejéről 2 kg tömegű golyó gurul le. A lejtőn való mozgás közben a súrlódás elhanyagolható. A lejtő kis görbülettel vízszintes, érdes síkba megy át, amelynek súrlódási tényezője $\mu = 0{,}2$. A lejtő lábától milyen messzire jut el a golyó?

Megoldás:
A lejtőn a súrlódás elhanyagolható, így energiamegmaradással számolhatunk:

$$mgh = \tfrac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh$$

A vízszintes síkon való csúszásnál a munkatételt (kinetikus energia tétele) használhatjuk:

$$\Delta E_{kin} = W: \quad 0 - \tfrac{1}{2} mv^2 = -\mu mg \cdot s \quad \Rightarrow \quad s = v^2/(2\mu g) = (2gh)/\,/(2\mu g) = h/\mu = 50 \text{ m}.$$

(fgy. 1.55.)
Hosszú függőleges csőben rugó van elhelyezve, amelynek a cső falával való súrlódása elhanyagolható. A rugóra 10 g tömegű golyót helyezve 1 cm-rel összenyomódik. Mennyivel nyomódik össze a rugó, ha a golyót a rugó tetejétől számított 1 m magasságból ejtjük rá?

XI. Munka, potenciál

Ha egy tömegpont $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erő hatására $\mathbf{r}(t)$ görbén mozog az $\mathbf{r}_0$ pontból az $\mathbf{r}_1$ pontba, az $\mathbf{F}$ erő által a testen végzett munka

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Konzervatív az erő akkor, ha rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ekkor
- két pont között a munka független a választott úttól;
- létezik egy $U(\mathbf{r})$ potenciálfüggvény, hogy $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$.

A térerősség az egységnyi tömegű (ill. töltésű) testre ható erő nagysága: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/m$ ($\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q$).
Konzervatív erőtérben a potenciált egységnyi tömegre (töltésre) szokták megadni: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$.

Egy $\mathbf{E} = 2(x+4)\,\mathbf{i} - 3z^2\,\mathbf{j} + 2x^2\,\mathbf{k}$ (N) erőtérben egy m = 2 kg tömegű anyagi pont mozog a P_0 (3,-1,2) és P_1(3,1,2) pontok között súrlódás nélkül, egyenes pályán. Határozzuk meg a végzett munkát!

Megoldás:
A mozgás itt csak az y tengellyel párhuzamosan történik, így dx = dz = 0.

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2 \cdot \int_{(3,-1,2)}^{(3,1,2)} \left\{2(x+4)dx - 3z^2dy + 2x^2dz\right\} = 2 \cdot \int_{-1}^{1} -3 \cdot 2^2 dy = \ldots = -48 \,[\mathrm{J}]$$

Határozzuk meg a végzett munkát akkor, ha az anyagi pont a fenti erőtérben a $P_2(0,0,0)$ és a $P_3(-5,4,4)$ pontok között mozog rendre az x,y,z tengelyekkel párhuzamosan!

Megoldás:

$$W=\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=m\cdot\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=2\cdot\left\{\int_{(0,0,0)}^{(-5,0,0)}2(x+4)dx+\int_{(-5,0,0)}^{(-5,4,0)}-3z^2dy+\int_{(-5,4,0)}^{(-5,4,4)}2x^2dz\right\}=$$

$$=2\cdot\left\{\int_0^{-5}2(x+4)dx+\int_0^4-3\cdot 0^2dy+\int_0^4 2\cdot(-5)^2dz\right\}=...=370\ [J]$$

Adott a térerősség a következő a lakban:

$\mathbf{E}=(3x+2xz)\,\mathbf{i}+(2y^2+5xz)\,\mathbf{j}+5xy\,\mathbf{k}$

a) Mekkora munkát végez az erőtér, ha egy m = 2 kg tömegű test mozog egy egyenes mentén a $P_0(1,2,-1)$ pontból a $P_1(-1,2,0)$ pontba?

b) Állapítsuk meg, létezik-e potenciál, és ha igen, adjuk meg!

Megoldás:

A P_0-ból P_1-be mutató egyenes egyenlete t-vel paraméterezve, P_0-nál t=0, P_1-nél t=1 választással:

$\mathbf{r}(t)=(-2t+1)\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+(t-1)\,\mathbf{k}\quad\Rightarrow\quad d\mathbf{r}=(-2\,\mathbf{i}+\mathbf{k})\,dt$

a) $$W=m\cdot\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=m\cdot\int_{t_0}^{t_1}\left\{E_x\cdot\frac{dx}{dt}+E_y\cdot\frac{dy}{dt}+E_z\cdot\frac{dz}{dt}\right\}dt=$$

$$=2\cdot\int_0^1\left\{\left[3\cdot(-2t+1)+2\cdot(-2t+1)\cdot(t-1)\right]\cdot(-2)+\left[2\cdot 2^2+5(-2t+1)\cdot(t-1)\right]\cdot 0+\left[5(-2t+1)\cdot 2\right]\cdot 1\right\}dt=$$

$$=2\cdot\int_0^1\left\{8t^2-20t+8\right\}dt=...=\frac{8}{3}J$$

b) $$\mathbf{rot\ E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3x+2xz&2y^2+5xz&5xy\end{vmatrix}=(5x-5x)\mathbf{i}-(5y-2x)\mathbf{j}+(5x-0)\mathbf{k}=(2x-5y)\mathbf{j}+5x\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$$

nem létezik potenciál

Adott a következő erőtér:

$\mathbf{E}=-2(xy+z)\,\mathbf{i}-x^2\,\mathbf{j}-(2x+5)\,\mathbf{k}$

Mekkora munkát kell végeznünk, ha egy m = 5 kg tömegű testet mozgatunk az

$\mathbf{r}(t)=(t+2)\,\mathbf{i}-3t\,\mathbf{j}+(t^2+1)\,\mathbf{k}$ görbe mentén a $P_0(2,0,1)$ pontból a $P_1(1,3,2)$ pontba?

Megoldás:

1.) $d\mathbf{r}=(\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}+2t\,\mathbf{k}\,)\,dt$

behelyettesítéssel látható, hogy P_0-ban $t_0=0$, P_1-ben $t_1=-1$

$$W=m\cdot\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=m\cdot\int_{t_0}^{t_1}\left\{E_x\cdot\frac{dx}{dt}+E_y\cdot\frac{dy}{dt}+E_z\cdot\frac{dz}{dt}\right\}dt=$$

$$=5\cdot\int_0^{-1}\left\{\left[-2\left((t+2)\cdot(-3t)+(t^2+1)\right)\right]\cdot 1+\left[-(t+2)^2\right]\cdot(-3)+\left[2(t+2)+5\right]\cdot(2t)\right\}dt=$$

$$=5\cdot\int_0^{-1}(3t^2+6t+10)\,dt=...=-40\ [J]$$

2.) Más megoldás: $\mathbf{rot\ E}=...=\mathbf{0}$, tehát az erőtér potenciálos.

2A.) A potenciálfüggvény:

mivel $\mathbf{E} = (E_x\,\mathbf{i} + E_y\,\mathbf{j} + E_z\,\mathbf{k}) = -\,\text{grad}\,U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)$

$\partial U/\partial x = -E_x = 2(xy+z) \;\Rightarrow\; U = x^2y + 2xz + \dots$

$\partial U/\partial y = -E_y = x^2 \;\Rightarrow\; U = x^2y + \dots$

$\partial U/\partial z = -E_z = 2x+5 \;\Rightarrow\; U = 2xz + 5z + \dots$

$\Rightarrow\; U = x^2y + 2xz + 5z$

Egységnyi tömegen az erőtér által végzett munka

$W/m = -\Delta U = -[U(P_1) - U(P_0)] = U(P_0) - U(P_1) = U(2,0,1) - U(1,3,2) =$

$= [2^2\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 1] - [1^2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 + 5\cdot 2] = 9 - 17 = -8$ J/kg, tehát $W = 5\cdot(-8) = -40$ J.

2B.) Mivel az erőtér potenciálos, választhatunk más, egyszerűbb utat is a P_0 és P_1 pontok között (mivel ekkor a munka csak a kezdő- és végpontoktól függ).

Válasszuk azt az utat, amikor rendre az x,y,z tengelyek mentén megyünk:

$$W = m\cdot\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 5\cdot\left\{\int_{(2,0,1)}^{(1,0,1)} -2(xy+z)dx + \int_{(1,0,1)}^{(1,3,1)} -x^2dy + \int_{(1,3,1)}^{(1,3,2)} -(2x+5)dz\right\} =$$

$$= 5\cdot\left\{\int_2^1 -2(x\cdot 0+1)dx + \int_0^3 -1^2dy + \int_1^2 -(2\cdot 1+5)dz\right\} = \dots = -40[\mathrm{J}]$$

Adott a következő erőtér:

$\mathbf{E} = (y-3)\,\mathbf{i} + (x-2z^2)\,\mathbf{j} - 4yz\,\mathbf{k}$

Mekkora munkát kell végeznünk, ha egy egységnyi tömegű testet mozgatunk az $x = 3$ síkban fekvő $y^2 + z^2 = 4$ egyenletű kör mentén pozitív irányban a $P_0(3,2,0)$ pontból a $P_1(3,-2,0)$ pontba?

Megoldás:

$\mathbf{r}(t) = 3\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}$

$d\mathbf{r} = (-2\sin t\,\mathbf{j} + 2\cos t\,\mathbf{k})\,dt$

P_0-ban $t = 0$, P_1-ben $t = \pi$

$$W = \int_0^\pi\left[(3 - 2\cdot 4\sin^2 t)(-2\sin t) - (4\cdot 2\cos t\cdot 2\sin t)\cdot(2\cos t)\right]dt = \dots =$$

$$= \int_0^\pi(-38\sin t + 48\sin^3 t)\,dt = \left[38\cos t - \frac{48\cos t\sin^2 t}{3} - \frac{2\cdot 48\cos t}{3}\right]_0^\pi = -12\,[\mathrm{J}]$$

tehát W = -12 J munkát végezne az erőtér, azaz nekünk 12 J munkát kell végeznünk.

Más megoldás:

rot E = ... = **0**, tehát az erőtér potenciálos

A potenciál $U = 3x - xy + 2yz^2$

az általunk végzendő munka $W = \Delta U = \dots = 12$ J.

(fgy. 1.51.)

a) Egy $\mathbf{F} = (Ax+B)\,\mathbf{i} + Cz^2\,\mathbf{j} + (Dx+E)\,\mathbf{k}$ erőtérben m tömegű anyagi pont mozog a P_0 (0,a,0) pontból a P_1 (0,0,a) pontba egyenes pályán. Mekkora munkát végez az erőtér?

b) Határozzuk meg az erőtér munkáját, ha a mozgás a $\overline{P_0 O}$ egyenes szakasz mentén történik, ahol O az origó!

c) Határozzuk meg az erőtér munkáját az $\overline{OP_1}$ szakaszra!

d) Határozzuk meg a munkát az (x,y) síkban fekvő „a" sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!

e) Konzervatív-e a fenti erőtér?

f) Határozzuk meg az erőtér munkáját az (x,z) síkban fekvő „a" sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!

(fgy. 1.56)

Keressük meg az alábbi helyzeti energia függvényekhez tartozó erőtereket! Adjuk meg a képletekben szereplő állandók lehetséges mértékegységeit!

1) $E_p = ax + by + cz$

2) $E_p = A \cdot e^{ax + by + cz}$

3) $E_p = A \cdot z \cdot e^{ax + by}$

4) $E_p = A \cdot (ax + by + cz)^{-1}$

5) $E_p = Ax^2 + by + cz^3$

6) $E_p = a \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

7) $E_p = a \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

8) $E_p = a \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^b$

9) $E_p = a \cdot (ax + by + cz) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

10) $E_p = (ax + by + cz)^3$

11) $E_p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$

12) $E_p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^{-1}$

13) $E_p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$

14) $E_p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2$

15) $E_p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^4$

16) $E_p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^n \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^m$

17) $E_p = a\left|\mathbf{r}\right|^{-1}$

18) $E_p = a\left|\mathbf{r}\right|$

19) $E_p = f\left(\left|\mathbf{r}\right|\right)$

20) $E_p = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot \left|\mathbf{r}\right|^{-3}$

21) $E_p = f\left(\left|\mathbf{r}\right|\right) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$

22) $E_p = f\left(\left|\mathbf{r}\right|\right) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^n$

23) $E_p = f\left(\left|\mathbf{r}\right|, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\right)$

24) $E_p = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

25) $E_p = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c})]$

(fgy. 1.57.)

Keressük meg az alábbi erőterekhez tartozó helyzeti energia függvényt, ha van! Adjuk meg a képletekben szereplő állandók lehetséges mértékegységeit! (Ha csak bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik helyzeti energia, akkor adjuk meg a szükséges feltételeket!)

1) $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

2) $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$

3) $\mathbf{F} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$

4) $\mathbf{F} = a \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

5) $\mathbf{F} = a \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

6) $\mathbf{F} = a \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

7) $\mathbf{F} = \mathbf{a}$

8) $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

9) $\mathbf{F} = f'(|\mathbf{r}|)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$

10) $\mathbf{F} = a\cdot e^{-b|\mathbf{r}|}\cdot\mathbf{r}$

11) $\mathbf{F} = \frac{ax}{b-x}\mathbf{i}$

12) $\mathbf{F} = \frac{ax}{b-x^2}\mathbf{i}$

13) $\mathbf{F} = x\mathbf{b}$

14) $\mathbf{F} = \frac{x}{a-x}\mathbf{b}$

15*) $\mathbf{F} = \frac{a\mathbf{r}}{b-|\mathbf{r}|}$

16*) $\mathbf{F} = 2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r} + r^2\,\mathbf{a}$

17) $\mathbf{F} = cr^n\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r} + r^m\,\mathbf{a}$

18*) $\mathbf{F} = f'(x)\,\mathbf{a}$

19*) $\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}|)\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a} + g(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}$

20*) $\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}|)\mathbf{a} + \varphi(|\mathbf{r}|)\mathbf{b}$

21) $\mathbf{F} = f(\mathbf{r})\,\mathbf{a}$

(fgy. 1.58.)
Bizonyítsuk be, hogy egy homogén gömbhéj gravitációs erőterének potenciálja a héjon belül konstans, kívül pedig olyan, mintha a héj tömege a héj középpontjában lenne összesűrítve!
Bizonyítsuk be, hogy egy homogén gömb gravitációs tere a gömbön kívül ugyanolyan, mintha a teljes tömeg a középpontban volna!

PONTRENDSZEREK

XII. Impulzustétel, impulzus megmaradás. Rugalmatlan és rugalmas ütközés.

Newton II. axiómájának alternatív alakja

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad \text{az impulzustétel.}$$

$\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ a test impulzusa,
$\mathbf{F}$ a testre ható összes erő eredője.
Pontrendszerre

$$\Sigma\mathbf{F}_i = \Sigma\dot{\mathbf{I}}_i = \Sigma\left(\dot{m\mathbf{v}}\right)_i$$

Mivel a belső erők összege a III. axióma miatt zérus, $\Sigma\mathbf{F}_i$ itt a külső erők összege.
Ha $\Sigma\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, akkor $\Sigma\mathbf{I}$ = konst., a rendszer össz-impulzusa állandó (impulzus megmaradás).
Ütközésnél (feltéve, hogy külső erők nem hatnak), az ütköző testek impulzusának összege állandó.
Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két testből egy lesz.
Tökéletesen rugalmas ütközésnél a két test ütközés után külön mozog tovább, az ütközés során nem lép fel energiaveszteség, energiájuk összege állandó.

(fgy. 2.12.)
L = 4 m hosszú, M = 40 kg tömegű csónak egyik végéből átmegy a másik végébe egy m = 80 kg tömegű ember.
Mennyit mozdult el a csónak a vízparthoz viszonyítva, ha a csónak mozgása a vízben jó közelítéssel közegellenállás-mentesnek tekinthető?

Megoldás:

Ha a csónak mozgása a vízben közegellenállás-mentesnek tekinthető, akkor a csónak + ember rendszerre nem hat vízszintes külső erő, tehát összes (vízszintes) impulzusuk állandó; méghozzá zérus, mert először álltak. Ha a csónak s távolságot mozdul el a parthoz viszonyítva, akkor sebessége $v = s/\Delta t$, ugyanakkor az ember (L-s) távolságot mozdul el a parthoz képest az ellenkező irányba, tehát sebessége $V = -(L-s)/\Delta t$.

$$0 = mv + MV = m \cdot s/\Delta t - M \cdot (L-s)/\Delta t \quad \Rightarrow \quad s = L \cdot M/(M+m) = 8/3 \text{ m}.$$

Mivel külső erő nem hat, ebből következik az is, hogy a tömegközéppont nem mozdul el a parthoz képest.

ℓ hosszúságú kötélen fellógatott M tömegű zsákba becsapódik egy m tömegű lövedék vízszintes u sebességgel. A lövedék benne marad a zsákban. Mekkora maximális φ szöggel lendül ki a zsák?

Megoldás:

Az ütközés tökéletesen rugalmatlan, és az ütközés során külső erő nem hat a zsák + lövedék rendszerre, tehát össz-impulzusuk állandó:

$$mu = (M+m)\,v \quad \Rightarrow \quad v = u \cdot m/(M+m)$$

Innen energiamegmaradással az emelkedés magassága

$$\tfrac{1}{2}(M+m)\,v^2 = (M+m)\,gh \quad \Rightarrow \quad h = v^2/2g = u^2 \cdot m^2/[2g(M+m)^2]$$

és az ehhez tartozó szög

$$h = l\,(1 - \cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = (l-h)/l = 1 - h/l = 1 - u^2 \cdot m^2/[2gl(M+m)^2]$$

M tömegű álló golyónak nekiütközik egy m tömegű golyó u sebességgel. Az ütközés tökéletesen rugalmasnak tekinthető. Adjuk meg a két golyó ütközés után sebességét, ha ütközés után egy egyenesen mozognak!

Megoldás:

Mivel az ütközés tökéletesen rugalmas, felírhatjuk az impulzus- és energiamegmaradást is:

$$mu = mv + MV$$

$$\tfrac{1}{2}mu^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2$$

Az első egyenletből kifejezve v-t $v = u - (M/m)V$, ennek négyzetét írjuk be a másodikba:

$$mu^2 = m(u^2 - (2M/m)uV + (M^2/m^2)V^2) + MV^2\,,$$

amiből $V = \dfrac{2m}{m+M}\,u$, és $v = \dfrac{m-M}{m+M}\,u$.

Nézzünk meg speciális eseteket:

1.	m = M (a két golyó egyforma tömegű)	$v = 0$, $V = u$	sebességet cserélnek
2.	m<<M (nagy tömegű álló golyónak ütközik elhanyagolható tömegű golyó)	$v \approx -u$, $V \approx 0$	a kis golyó visszapattan, a nagy meg se mozdul
3.	m>>M (elhanyagolható tömegű golyónak ütközik nagy tömegű golyó)	$v \approx u$, $V \approx 2u$	a nagy golyó változatlan sebességgel megy tovább, a kis golyó kétszer akkora sebességgel indul

---

M tömegű álló golyónak nekiütközik egy m tömegű golyó u sebességgel. Az ütközés tökéletesen rugalmasnak tekinthető. Adjuk meg a két golyó ütközés után sebességét, ha ütközés után az m tömegű golyó a két golyót összekötő egyenesre merőlegesen halad tovább! Mekkora szöget zár be az M tömegű golyó sebessége a két golyót összekötő egyenessel?

Megoldás:
Az ütközés tökéletesen rugalmas, felírhatjuk az impulzus- és energiamegmaradást is (az impulzust két komponensre, a golyókat összekötő egyenes irányára ill. az arra merőleges irányra bontva):

$$mu = MV\cos\varphi$$
$$0 = mv - MV\sin\varphi$$
$$\tfrac{1}{2}\, mu^2 = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + \tfrac{1}{2}\, MV^2$$

Az elsőből $V\cos\varphi$-t, a másodikból $V\sin\varphi$-t kifejezzük és négyzetük összegét beírjuk a harmadikba egyenletbe:

$$(V\cos\varphi)^2 + (V\sin\varphi)^2 = V^2 = (mu/M)^2 + (mv/M)^2 = (m/M)^2\,(u^2+v^2)$$

$$mu^2 = mv^2 + M\,(m/M)^2\,(u^2+v^2) \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\,u\,,\ \text{és}\quad V = \sqrt{\frac{2m^2}{M(M+m)}}\,u$$

Az M tömegű golyó eltérülésének szöge:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi = (mv/M)/(mu/M) = v/u = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$$

Egy M = 7 kg-os lövedék pályájának legfelső pontján, a kilövés után 3 s-mal két darabra robban szét. A robbanás egy, a kilövési ponttól d = 1200 m távolságra tartózkodó őrmester feje fölött történt, majd a robbanás után 1 s-mal egy m_1 = 2 kg-os repeszdarab közvetlenül az őrmester lába elé esett.
A kilövés helyétől milyen távolságban keressék a másik repeszdarabot?
(A terep sík, nincsenek hegyek a közelben.)

Megoldás:
Mivel a kilövéstől a robbanásig 3 s telt el és ezalatt 1200 m-t tett meg vízszintesen a repesz, vízszintes sebessége $v_0 \cos\alpha = d / t_h = 1200 / 3 = 400$ m/s. Ez lesz a sebessége a robbanáskor. A robbanás ugyanis a pálya csúcspontján történik, amikoris a repesz függőleges sebessége zérus ($v_0 \sin\alpha - g t_h = 0$). Utóbbiból kiszámítható a robbanás helyének magassága: a függőleges kezdősebesség $v_0 \sin\alpha = g t_h = 10\cdot 3 = 30$ m/s, amivel $h = (v_0 \sin\alpha)\, t_h - \tfrac{1}{2} g t_h^2 = 30\cdot 3 - 5\cdot 3^2 = 45$ m. A 2 kg tömegű repeszdarab ebből a magasságból érkezett le t_1 = 1 s alatt, vagyis $h + v_{10} t_1 - \tfrac{1}{2} g t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{10} = -40$ m/s függőleges kezdősebessége volt a robbanás után.
Az impulzusmegmaradást felírva a robbanásra:

$$M v_0 \cos\alpha\, \mathbf{i} = m_1 v_{10}\, \mathbf{k} + m_2 \mathbf{v_2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v_2} = (M v_0 \cos\alpha) / m_2\, \mathbf{i} - (m_1 v_{10}) / m_2\, \mathbf{k} = (7\cdot 400/5)\, \mathbf{i} - (2\cdot{-40}/5)\, \mathbf{k} = 560\, \mathbf{i} + 16\, \mathbf{k}$$

lesz az 5 kg tömegű darab kezdősebessége. A helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = (1200 + 560\, t)\, \mathbf{i} + (45 + 16\, t - 5\, t^2)\, \mathbf{k}\,.$$

$$45 + 16\, t_t - 5\, t_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 5 \text{ s alatt ér földet}$$

$d_2 = 1200 + 560\, t_2 = 4000$ m távol a kilövés helyétől.

M_0 tömegű rakéta M tömegű üzemanyagot visz magával. v_0 sebességről indulva gyorsítani kezd az üzemanyag elégetésével. Az égéstermékek c sebességgel hagyják el a rakétát (a rakétához képest). Adjuk meg a rakéta sebességét az idő függvényében! Mekkora végsebességet ér el a rakéta az összes üzemanyag elégetésével?

A rakétára külső erő nem hat, impulzusmegmaradással számolhatunk. Most azonban nem csak a sebesség, hanem a tömeg is változik. Egy adott időpontban a rakéta tömege m, sebessége v, dt idő elteltével pedig a rakéta tömege m+dm, sebessége v+dv, és a –dm tömegű égéstermék v-c (vagy v+dv-c) sebességű:

$$Mv = (m+dm)(v+dv) - dm(v+dv-c)$$

Beszorozva, egyszerűsítések után kapjuk, hogy $\quad m\,dv + c\,dm = 0$.
Ezt szeparálva és integrálva

$$\int_{v_0}^{v} dv = -c \int_{M_0+M}^{m} \frac{1}{m} dm \quad \Rightarrow \qquad v = v_0 + c \ln (M_0+M)/m$$

A rakéta végsebessége $v_{vég} = v_0 + c \ln (M_0+M)/M_0$

Egy útkereszteződésben a STOP táblánál álló autóba hátulról beleütközik egy másik autó. A két autó tömege egyenlő. Az összetapadt roncs az ütközés helyétől 18 m-re áll meg a 8 m széles főút túlsó oldalán levő mezőn. A szabálytalankodó kocsi 11,4 m –es féknyomot hagyott az ütközés előtt. Mekkora sebességgel haladt, mielőtt fékezni kezdett? A súrlódási együttható az aszfalton $\mu_a = 0{,}4$, a mezőn $\mu_f = 0{,}5$.

Megoldás:
A roncs 10 m-t tett meg a mezőn μ_f súrlódási együtthatóval fékeződve, mire sebessége zérus lett. Munkatétellel kiszámítva azt a sebességet, amivel az aszfaltról a mezőre érkezett:
$0 - ½ (2m) v_1^2 = -\mu_f(2m)g \cdot s_1 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2\mu_f g s_1$, $v_1 = 10$ m/s (=36 km/h)
illetve amivel a roncs az ütközés után indult az aszfalton:
$½ (2m) v_1^2 - ½ (2m) v_2^2 = -\mu_a(2m)g \cdot s_2 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = v_1^2 + 2\mu_a g s_2$, $v_2 = 12{,}8$ m/s ($\approx$ 46 km/h) .
Ütközéskor a v_3 sebességgel haladó autó ütközött az állóval; felírva az impulzusmegmaradást:
$m v_3 = (2m) v_2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 2 v_2 = 25{,}6$ m/s ($\approx$ 92 km/h).
Munkatétellel kiszámítva azt a sebességet, amiről az autó fékezni kezdett:
$½ m v_0^2 - ½ m v_3^2 = -\mu_a mg \cdot s_3 \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = v_3^2 + 2\mu_a g s_3$, $v_0 = 27{,}3$ m/s ($\approx$ 98 km/h) .

XIII. Tömegközéppont

Pontrendszer tömegközéppontja

$$\mathbf{r}_s = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i} \qquad \text{(tömegekkel súlyozott átlagos helyvektor)}$$

Kiterjedt testre

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r} \rho \, dV}{\int \rho \, dV} = \frac{\int \mathbf{r} \rho \, dV}{M}$$

Tömegközéppont tétele (súlypont-tétel): $m\ddot{\mathbf{r}}_s = \Sigma \mathbf{F_i}$ (a tömegközéppont úgy mozog, mintha a teljes tömeg a tömegközéppontban lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna)

(fgy. 2.1.)
Elhanyagolható tömegű és súrlódású csigán átvetett kötél két végén $m_1 = 5$ kg ill. $m_2 = 3$ kg tömegű teher lóg. Amikor magára hagyjuk a rendszert, a két tömeg ugyanolyan magasságban van.
a) Milyen mozgást végez a súlypont?
b) Milyen pályát ír le?

Megoldás:
súlypont-tétellel $(m_1+m_2)\ddot{\mathbf{r}}_s = m_1 g - m_2 g \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{r}}_s = (m_1-m_2)/(m_1+m_2) \cdot g = g/4 \approx 2{,}5$ m/s^2
A súlypont függőlegesen lefelé mozog g/4 gyorsulással.

(fgy. 2.2)

Egy 3 kg tömegű lövedék 100 m/s kezdősebességgel 45° alatt lett kilőve. Pályájának tetőpontján felrobban és egy m_1 = 2 kg-os és egy m_2 = 1 kg-os darabra esik szét. A repeszek pályájának síkja egybeesik az eredeti pálya síkjával. A robbanás után 2 s elteltével az 1 kg-os darab a kilövési helyhez viszonyítva 700 m távolságban (vízszintesen számítva!) és 100 m magasságban van.
a) Hol van ugyanezen időpontban a másik darab?
b) A robbanás milyen irányban és mekkora kezdősebességgel vetette szét a két repeszt?

(fgy. 2.3.)
66 kg tömegű kötéltáncos súlypontja a kötél felett 1 m magasságban van. Ugyanezen magasságban tartja a kezében levő 6 m-es, 4 kg tömegű merev rudat, melynek mindkét végén levő 2 m-es fonálon 1-1 ólomgolyó függ. Legalább milyen tömegűeknek kell lenniük a golyóknak, hogy a rendszer súlypontja a kötél alá essék? (A rudat középütt fogja, a 2 m távolság a rúdtól a golyó középpontjáig értendő.)

(fgy. 2.4.)
Hol helyezkedik el egy homogén tömegeloszlású kúp súlypontja?

(fgy. 2.5.)
Hol helyezkedik el egy H magasságú, 2R maximális nyílásszélességű parabola alakú drót súlypontja?

(fgy. 2.6.)
L hosszúságú rúd sűrűsége egyik végén ρ, másik végén 2ρ, közben egyenletesen változik. A rúd keresztmetszete mindenütt azonos. Hol van a súlypontja?

(fgy. 2.7.)
Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott síklap súlypontjának helyzetét, ha annak alakja
a) félkör,
b) negyed kör,
c) α nyílásszögű körcikk,
d) derékszögű háromszög,
e) általános háromszög!

(fgy. 2.8.)
Határozzuk meg egy homogén félgömb súlypontjának helyzetét!

(fgy. 2.9.)
Egy egyenes csonkakúp alaplapjának sugara R, fedőlapjáé r. Milyen arányban osztja a súlypontja a magasságát?

(fgy. 2.10.)

Egy háromszög három csúcsában egyenlő tömegű golyók vannak. Mutassuk meg, hogy a három golyóból álló pontrendszer tömegközéppontja a háromszög súlypontjában helyezkedik el!

(fgy. 2.11.)
A levegő sűrűsége a

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

formulával leírható módon függ a h magasságtól. $\rho_0 = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, $p_0 = 10^5$ Pa. Milyen magasan van egy egyenletes keresztmetszetű levegőoszlop tömegközéppontja?

(fgy. 2.12.)
L = 4 m hosszú, M = 40 kg tömegű csónak egyik végéből átmegy a másik végébe egy m = 80 kg tömegű ember.
Mennyit mozdult el a csónak a vízparthoz viszonyítva, ha a csónak mozgása a vízben jó közelítéssel közegellenállás-mentesnek tekinthető?

(fgy. 2.13.)
Határozzuk meg, hol van egy hamisjátékos 15 mm élhosszúságú fából készült dobókockájának súlypontja, ha egyik oldalába 1 mm vastag vaslemezt épített be! $\rho_{fa} = 0{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$, $\rho_{vas} = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$.

Azonos keresztmetszetű és hosszúságú, homogén vas- és alumíniumrudat végüknél összeragasztunk, majd az így kapott rudat a súlypontjánál kettévágjuk. Mennyi lesz a két rész tömegének aránya?

Vízmolekulában a kötéshossz 95,8 pm, a kötésszög 104°. Hol van a molekula tömegközéppontja?

XIV. Impulzusmomentum-tétel, impulzusmomentum-megmaradás. Forgó mozgás. Tehetetlenségi nyomaték. Steiner-tétel.

Általában egy **a** vektor momentuma: $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$
Az erő momentuma a forgatónyomaték: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
Az impulzus momentuma az impulzusmomentum: $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{I}$.
Az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletet vektoriálisan szorozva **r**-rel kapjuk az impulzusmomentum-tételt:

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M}$$

Pontrendszerre **M** az összes külső erő forgatónyomatéka (ha a belső erők centrálisak).

Ha $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, akkor **N** = konst. (impulzusmomentum-megmaradás).

Forgó mozgás esetén N = Θω.
Θ az adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

egy tömegpontra $\Theta = ml^2$,
pontrendszerre $\Theta = \Sigma m_i l_i^2$,
kiterjedt testre $\Theta = \int l^2 \rho \, dV$,
ahol l a forgástengelytől mért távolság.

Az egymással párhuzamos forgástengelyek közül arra a tengelyre lesz minimális a tehetetlenségi nyomaték, amelyik átmegy a tömegközépponton.
Steiner-tétel: ha Θ_s a tömegközépponton átmenő forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték és a forgástengelyt párhuzamosan eltoljuk d távolsággal, akkor az új forgástengelyre vonatkozó Θ_d tehetetlenségi nyomaték $\Theta_d = \Theta_s + md^2$.

Az egymásnak megfeleltethető mennyiségek haladó ill. forgó mozgás esetén:

m tömeg	Θ tehetetlenségi nyomaték
a gyorsulás	β szöggyorsulás
v sebesség	ω szögsebesség
r helyvektor	φ szögkoordináta
F erő	**M** forgatónyomaték
I impulzus	**N** impulzusmomentum
impulzustétel: $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$	impulzusmomentum-tétel: $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M}$
½ mv^2 kinetikus energia	½ $\Theta\omega^2$ forgási kinetikus energia

---

(fgy. 2.16.)
Igen könnyű 1 m hosszú rúd végén 5 – 5 kg tömegű golyók vannak felerősítve.
a) Számítsuk ki a rúd felezési pontján, a rúdra merőleges tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!
b) Mennyivel változik meg a tehetetlenségi nyomaték, ha a tengelyt a rúd mentén önmagával párhuzamosan 10 cm-rel eltoljuk?

Megoldás:
a) a rúd tömege elhanyagolható, $\Theta_s = \Sigma m_i l_i^2 = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}5^2 = 2{,}5$ kgm^2
b) Steiner-tétellel $\Theta = \Theta_s + (\Sigma m_i) \cdot d^2 = 2{,}5 + 10 \cdot 0{,}1^2 = 2{,}6$ kgm^2

(fgy. 2.17.)
Lejtő tetejéről azonos sebességgel gurul lefelé két kerékpáros. Az egyiknek 28-as (nagyobb átmérőjű kerekű), a másiknak 26-os biciklije van. Melyik ér le előbb a lejtőn, ha a kerekek, valamint az össztömegük külön-külön megegyeznek? (A súrlódást hanyagoljuk el!)

(fgy. 2.18.)
Számítsuk ki egy ’R’ sugarú, homogén tömegeloszlású korongnak a középpontján, a korongra merőlegesen álló tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás:
Ha M a korong tömege, akkor a sűrűsége $\rho = M/V = M/(R^2\pi d)$, ahol d a korong vastagsága.
$$\Theta = \int l^2 \rho \, dV$$
hengerkoordináta-rendszert használva a térfogatelem $dV = d \cdot r\, d\varphi \cdot dr$;
a forgástengelytől mért távolság $l = r$

tehát $\Theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \dfrac{M}{R^2\pi d} d \cdot r\, d\varphi\, dr = \dfrac{M}{R^2\pi}\int_0^R r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi\, dr = \dfrac{M}{R^2\pi} \cdot 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \dfrac{2M}{R^2} \cdot \dfrac{R^4}{4} = \dfrac{1}{2} MR^2$

(a korong vastagságától független!)

(fgy. 2.19.)
Számítsuk ki egy ’R’ sugarú félgömb szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás:
M tömegű félgömb sűrűsége $\rho = M/V = M/(2R^3\pi/3) = 3M/(2R^3\pi)$.
A félgömböt összerakhatjuk a forgástengelyre merőleges korongokból, melyek sugara
$r = \sqrt{R^2 - x^2}$, térfogata $dV = r^2\pi\, dx = (R^2-x^2)\pi\, dx$,
tömege $dm = \rho\, dV = 3M/(2R^3\pi) \cdot (R^2-x^2)\pi\, dx = 3M/(2R^3) \cdot (R^2-x^2)\, dx$,
tehetetlenségi nyomatéka

$$d\Theta = ½\, dm\, r^2 = ½\, [3M/(2R^3) \cdot (R^2-x^2)\, dx] \cdot (R^2-x^2) = 3M/(4R^3) \cdot (R^2-x^2)^2\, dx$$

A félgömbre tehát $\Theta = \int d\Theta = \int_0^R \dfrac{3M}{4R^3}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx = ... = \dfrac{2}{5} MR^2$

(fgy. 2.20.)
Egy a,b,c oldalú téglatest súlypontján átmenő, az oldalakkal párhuzamos tengelyekkel rendelkezik.
a) Számítsuk ki az ezekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékokat!
b) Tartson pl. az ’a’ oldal zérushoz. Hogyan változnak az előbbi tehetetlenségi nyomatékok? Milyen összefüggés állítható fel közöttük?

(fgy. 2.21.)
Számítsuk ki az egyenes gúla magasságvonalával párhuzamos és az alaplap egyik csúcsán átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

(fgy. 2.22.)
Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott téglalap tehetetlenségi nyomatékát a súlyponton átmenő három tengelyre, melyek egyike merőleges a téglalap síkjára, a másik kettő pedig párhuzamos az oldalakkal!

(fgy. 2.23.)
Határozzuk meg egy homogén egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát
a) a szimmetriatengelyre,
b) egy alkotóra vonatkoztatva!

(fgy. 2.24.)
Határozzuk meg egy homogén tömegeloszlású egyenes körkúp tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyre vonatkoztatva!

(fgy. 2.25.)
Mekkora gyorsulással gördül le egy a hajlásszögű lejtőn egy

a) henger;
b) golyó;
c) üres belsejű henger?

Megoldás:
A lejtőn legördülő testre hat az m**g** gravitációs erő, a lejtő F_n nyomóereje és egy F_t tapadási súrlódási erő a lejtőn felfelé a test és a lejtő érintkezésénél.
Felírhatjuk
- egyrészt a tömegközéppont-tételt:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_n} + \mathbf{F_t}$$

Mivel $F_n = mg\cos\alpha$, a lejtő síkjával párhuzamosan

$$ma = mg\sin\alpha - F_t$$

- másrészt az impulzusmomentum-tételt:

$$M = \dot{N} = \Theta\beta$$

Mivel m**g** és $\mathbf{F_n}$ átmennek a tömegközépponton, forgatónyomatéka csak $\mathbf{F_t}$-nek van:

$\Theta\beta = F_t \cdot R$, ahol Θ a test tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka.

Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $a = R\beta$.

Ezekből $ma = mg\sin\alpha - 1/R \cdot \Theta \cdot a/R \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{\Theta}{mR^2}}$

a) hengerre $\Theta = 1/2\, mR^2$, $a = 2/3\, g\sin\alpha$
a) gömbre $\Theta = 2/5\, mR^2$, $a = 5/7\, g\sin\alpha$
a) üres hengerre $\Theta = mR^2$, $a = 1/2\, g\sin\alpha$

(fgy. 2.28.)
M tömegű, R sugarú csigára feltekert fonálon m tömegű teher függ a földtől h magasságban. Elengedve milyen végsebességgel érkezik le?

Megoldás:
Ha a súrlódást elhanyagolhatjuk, akkor energia-megmaradással
$mgh = ½\, mv^2 + ½\, \Theta\omega^2$
a korongra $\Theta = ½\, MR^2$
ha a kötél nem csúszik meg a csigán, akkor $\omega = v/R$
tehát $mgh = ½\, mv^2 + ½\, (½\, MR^2)(v/R)^2 = ½\, (m + M/2)\, v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2mgh/(m+M/2)}$

(fgy. 2.29.)
Egy m tömegű, L hosszúságú homogén, egyenletes keresztmetszetű rudat egyik végén átmenő vízszintes tengely körül lengetünk. Mekkora lesz a lengésidő?

(fgy. 2.31.)
Egy 20 g-os, 1 cm sugarú, 1 mm vastagságú vékony pénzérmét mekkora forgatónyomatékkal kell az élén átmenő függőleges tengely körül megpörgetni, hogy 0,1 s alatt 10 s^{-1} szögsebességet érjünk el? (A súrlódástól tekintsünk el.)

Egyik végén (súrlódásmentes) csuklóval felfogott rudat vízszintes helyzetből (kezdősebesség nélkül) elengedünk. Adjuk meg

- másik végpontjának gyorsulását;
- a rúd szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szöge függvényében!

Megoldás:

L hosszúságú, m tömegű, homogén, állandó A keresztmetszetű rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges, tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta_S = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho A\, dx = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{AL} A\, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{L^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} mL^2$$

A rúd tehetetlenségi nyomatéka a P végpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva (Steiner-tétellel):

$\Theta_P = \Theta_S + m(L/2)^2 = 1/3\ mL^2$

A rudat a nehézségi erő forgatja, mely a rúd tömegközéppontjában hat, vízszintesen mért távolsága a forgástengelytől $L/2 \cdot \cos\varphi$.

$M = \dot{N}$: $M = mg \cdot L/2 \cdot \cos\varphi$, $\dot{N} = \Theta_P \beta$, $\Theta_P = 1/3\ mL^2$

$\Rightarrow$ $1/3\ mL^2\ \beta = mg \cdot L/2 \cdot \cos\varphi$, amiből $\beta = 3/2\ g/L \cdot \cos\varphi$ (*)

A rúd másik végpontjának gyorsulása $a = L \cdot \beta = 3/2\ g \cos\varphi$ (induláskor $a = 3/2\ g > g$!)

(*) $\beta = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega\, d\omega/d\varphi = 3/2\ g/L \cdot \cos\varphi$

szeparálva $\omega\, d\omega = 3/2\ g/L \cdot \cos\varphi\, d\varphi$

integrálva, felhasználva, hogy $\varphi = 0$-nál $\omega = 0$: $\omega = \sqrt{3g/L \sin\varphi}$

A rúd szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szöge függvényében megkaphatjuk energia-megmaradásból is. A rúd helyzeti energiáját a tömegközéppontjának helyzetével adjuk meg:

$mg\ L/2 \cdot \sin\varphi = ½\ \Theta_P\ \omega^2 = ½ \cdot 1/3\ mL^2\ \omega^2$ $\Rightarrow$ $\omega = ...$

Egy vízszintes síkra helyezett M tömegű, R sugarú korong peremére feltekert súlytalan, nyújthatatlan kötél végére m tömegű testet akasztunk és ez az m tömegű test húzza a korongot egy súlytalan, súrlódásmentes csigán átvetve. Adjuk meg a korong gyorsulását, ha a korong tisztán gördül!

Megoldás:

Az m tömegű testre hat az mg nehézségi erő és egy K kötélerő:

$ma = mg - K$

A korongra vízszintes irányban hat a K kötélerő és a síkkal való P érintkezési pontnál egy F_s súrlódási erő.

A korong gördülését vizsgálhatjuk úgy, hogy pillanatnyi forgástengelynek

1) a P érintkezési pontot tekintjük

ekkor a P pont gyorsulása zérus,

forgatónyomatéka csak K-nak van:

$\Theta_P\ \beta = K \cdot 2R$, ahol $\Theta_P = ½\ MR^2 + MR^2 = 3/2\ MR^2$ és $\beta = a / 2R$

2) a korong O középpontját tekintjük

ekkor az O pont gyorsulása

$ma_O = K - F_s$, ahol $a_O = a / 2$

forgatónyomatéka K-nak és F_s-nek is van:

$\Theta_O\ \beta = K \cdot R + F_s \cdot R$, ahol $\Theta_O = ½\ MR^2$ és $\beta = a_k / R = a / 2R$.

Az egyenleteket megoldva $a = 8m / (8m+3M) \cdot g$

Egy M tömegű, R sugarú korongot leteszünk vízszintes síkra úgy, hogy egy helyben ω_0 szögsebességgel pörög. Mit fog csinálni, ha a síkkal való érintkezési pontjánál F_s súrlódási erő lép fel?

Megoldás:
Az F_s súrlódási erő a korong forgását fékezi (1), de olyan irányú, hogy ezzel a haladó mozgását gyorsítja (2), tehát
(1) $\Theta\beta = - F_s \cdot R$, ahol $\Theta = ½\, MR^2$
(2) $Ma = F_s$, $F_s = \mu Mg \Rightarrow a = \mu g$ (most nem igaz, hogy $a = \beta R$!)
A fentiekből $½\, MR^2 \cdot \beta = - \mu mg \cdot R \quad \Rightarrow \quad \beta = - 2\mu g/R$
$\Rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \omega_0 - 2\mu g/R \cdot t$
$\Rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = \mu gt$
Attól a pillanattól kezdve, amikor $v(t) = R\, \omega(t)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:
$R \cdot (\omega_0 - 2\mu g/R \cdot t) = \mu gt \quad \Rightarrow \quad t = R\omega_0 / 3\mu g$
(Innentől viszont külön kell felvenni egy haladó mozgást fékező súrlódási erőt és egy forgó mozgást fékező nyomatékot, különben ellentmondásra jutnánk!)

Egy M tömegű, R sugarú korongot meglökünk v_0 kezdősebességgel vízszintes síkon úgy, hogy forgás nélkül tisztán csúszik. Mikortól fog tisztán gördülni?

Megoldás:
A korongnak a síkkal való érintkezési pontjánál fellépő F_s súrlódási erő a haladó mozgást fékezi (1) , de a korong forgását gyorsítja (2).
(1) $Ma = -F_s$, $F_s = \mu Mg \Rightarrow a = -\mu g$
(2) $\Theta\beta = F_s \cdot R$, ahol $\Theta = ½\, MR^2$ (most nem igaz, hogy $a = \beta R$!)
$\Rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = v_0 - \mu gt$
$\Rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = 2\mu g/R \cdot t$
Attól a pillanattól kezdve, amikor $v(t) = R\, \omega(t)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:
$2\mu g \cdot t = v_0 - \mu gt \quad \Rightarrow \quad t = v_0 / 3\mu g$

Függőlegesen fellógatott M tömegű, L hosszúságú homogén rúd alsó pontjához vízszintes v sebességgel érkezve hozzátapad egy m tömegű golyó. Mekkora szögsebességgel indul a rúd a hozzátapadt golyóval és maximum mekkora szöggel lendül ki?

Megoldás:
Az impulzusmomentum-megmaradást írhatjuk fel az ütközés pillanatára (mert az ütközés után a rendszer forgó mozgást végez):
ütközés előtt a golyó impulzusa $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$, ennek momentuma a forgástengelyre $N = mv \cdot L$ (a nagysága) (a rúd impulzusmomentuma pedig zérus);
ütközés után a rúd+golyó rendszer impulzusmomentuma $N = = \Theta\beta$, ahol $\Theta = 1/3\ ML^2 + mL^2$,
tehát $mv \cdot L = (1/3\ ML^2 + mL^2)\ \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = m / (M/3+m) \cdot v/L$

Mivel a rúd súrlódásmentesen fordul, energia-megmaradással számíthatjuk, milyen magasra lendül ki:

$$½\ \Theta\omega^2 = Mg \cdot (L/2 \cdot \cos\alpha) + mg \cdot (L \cdot \cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = ...$$

CSIGÁS FELADATOK!!!