Fizika számolási gyakorlat

I. Kinematika (anyagi pont)

Általános feladatok, koordinátarendszer alkalmas választása

I.1. (fgy. 1.1.)

Egy motorcsónak a folyón felfelé halad, és szembetalálkozik egy tutajjal. A találkozás után 1 órával a motor elromlik. A javítás fél órát vesz igénybe, és utána a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral– lefelé megy. Az első találkozás helyétől 7,5 km-re éri utol a tutajt.
Mennyi a folyó sebessége? (Tételezzük fel, hogy a motorcsónak a folyóhoz képest állandó sebességgel halad, a tutaj pedig a folyóval együtt mozog.)

Megoldás:

A feladat megoldható (1) a parthoz rögzített, (2) a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

(1)

A koordinátarendszerünk x tengelyét helyezzük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az x tengely pozitív értékei legyenek azok, amerre a víz (és a tutaj) mozognak. A motorcsónak és a tutaj helyzetének x koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

motorcsónak: $1 \cdot (v_f + v_{cs}) + 0,5 \cdot v_f + t \cdot (v_f - v_{cs}) = 7,5$

ahol v_f a folyó sebessége a parthoz képest (pozitív),
v_{cs} a motorcsónak sebességének nagysága a parthoz képest (pozitív ill. negatív attól függően, hogy a csónak a pozitív vagy negatív x tengely irányába mozog),
t az az idő, amíg a csónak a folyón lefelé halad bekapcsolt motorral

tutaj: $(1 + 0,5 + t) \cdot v_f = 7,5$

A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van. Átrendezve őket

$(1 + 0,5 + t) \cdot v_f + (1- t) \cdot v_{cs} = 7,5 + (1- t) \cdot v_{cs} = 7,5 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \text{ h}, \quad v_f = 3 \text{ km/h}$

A csónak sebessége tetszőleges lehet.

(2)

A koordinátarendszerünk origója legyen a tutajra rögzítve, az x tengely pozitív iránya mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól. Ekkor a tutaj x koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak x koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

$$1 \cdot v_{cs} + t \cdot (-v_{cs}) = 0$$

Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órát távolodik a tutajtól v_{cs} sebességgel és utána ugyancsak v_{cs} sebességgel közeledik hozzá, a közeledés ideje is 1 óra, másrészt hogy a csónak sebessége tetszőleges.

I.2. (fgy. 1.2.)

Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel.
Milyen időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

Megoldás:

A koordinátarendszerünket helyezzük az egyik villamosra; ez a koordinátarendszer c-vel mozog az úttesthez képest. A szomszédos villamos távolsága cT, ekkora utat kell a gépkocsinak megtennie a villamoshoz képest. Mivel a gépkocsi sebessége az úttesthez képest v, a villamoshoz rögzített koordinátarendszerben v-c, azaz

ha $v>c$ (egy irányba haladnak és a gépkocsi gyorsabb), akkor $(v-c)$-vel halad a gépkocsi az előttük menő villamos felé és $t = cT / (v-c)$ alatt éri el;
ha $c>v>0$ (egy irányba haladnak és a villamos gyorsabb), akkor $(c-v)$-vel közeledik a gépkocsi a mögöttük menő villamos felé és $t = cT / (c-v)$ alatt éri el;
ha $v<0$ (ellenkező irányba haladnak), akkor $(v+c)$-vel közeledik a gépkocsi a mögöttük menő villamos felé és $t = cT / (v+c)$ alatt éri el.

I.3. (fgy. 1.3.)
Egy ember a tóparton levő A pontból a *legrövidebb idő* alatt szeretne a B pontba érni.
Milyen útvonalat válasszon, ha maximális futási sebessége v_f, úszási sebessége pedig $v_ú$?
A B pontból a partra húzott merőleges talppontját P-vel jelölve $\overline{AP} = s$, $\overline{BP} = d$.

Az út két szakaszból áll, először s-x távolságot fut a parton, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út $\sqrt{x^2+d^2}$. A teljes idő tehát

$$t(x) = t_f + t_ú = \frac{s-x}{v_f} + \frac{\sqrt{x^2+d^2}}{v_ú}$$

Azt az x értéket keressük, ahol t-nek minimuma van:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_f} + \frac{x}{v_ú\sqrt{x^2+d^2}} = 0,$$

amiből $x = \dfrac{v_ú}{\sqrt{v_f^{\,2} - v_ú^{\,2}}} d$.

Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha $v_f > v_ú$ (ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon).
Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy $x \le s$, azaz:

$$\frac{v_ú}{\sqrt{v_f^{\,2} - v_ú^{\,2}}} d \le s \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{v_f}{v_ú}\right)^2 \ge 1 + \left(\frac{d}{s}\right)^2$$

Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.

I.4. (fgy. 1.4.)
Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen (a partra merőlegesen tartva a csónak tengelyét), a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vizének sebességeloszlása parabolikus:

$$u = u_0\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

ÁBRA!!!

a) Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!
b) Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér?

Megoldás:

A folyó vize az x tengely irányában folyik, azaz $\dfrac{dx}{dt} = u_0\left(1 - \dfrac{4y^2}{L^2}\right)$,

a csónak sebessége az y tengely irányába mutat: $\dfrac{dy}{dt} = v$.

A kettő hányadosa megadja a pálya érintőjét:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_0}{v}\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

Ez a differenciálegyenlet szeparálható.
A kezdeti feltétel: a csónak az x = 0, y = - L/2 pontból indul:

$$\int_0^x dx = \int_{-L/2}^{y} \frac{u_0}{v}\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy,$$

amiből a pálya egyenlete

$$x = \frac{u_0}{v}\left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3}\right)$$

b) Ha a csónak átér a túlsó partra, akkor y = L/2, és $x\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{u_0}{v} \cdot \frac{2}{3} L$

(Mivel a folyó vizének sebességeloszlása az y = 0 –ra szimmetrikus, a lesodródás a túlsó partig kétszer annyi, mint a folyó közepéig – így gyorsabban számolható.)

I.5.
A és B város egy egyenes partú víz partján helyezkednek egymástól d távolságra. Egy (vízhez képest) v_{cs} sebességű motorcsónakkal elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba a lehető legrövidebb úton. Ugyanannyi idő kell-e ehhez, ha ez a bizonyos víz egy tó ill. egy v_f (állandó) sebességű folyó?

I.6.
A és B város 84 km-re vannak egymástól. Két biciklis indul el egy időben egymással szembe, az egyik A-ból B-be 16 km/h, a másik B-ből A-ba 12 km/h sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból, és elrepül addig, amíg találkozik a B városból jövő biciklistával, akkor gyorsan visszafordul, elrepül az A-ból jövő biciklistáig, majd újra a B-ből jövőig, stb., stb. A fecske sebessége 50 km/h. Hány km-t tesz meg, amíg a két biciklista összetalálkozik az A és B közötti úton?

II. Anyagi pont mozgásának leírása Descartes-féle koordinátarendszerben, r = r (t). Pillanatnyi és átlagsebesség, gyorsulás. Pálya. Vektorok.

II.1. (fgy. 1.5.)
Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

$$\mathbf{r}(t) = (at+b)\,\mathbf{i} + (at-b)\,\mathbf{j} + (-ct^2+4at+5b)\,\mathbf{k},$$

ahol $a = 3\ ms^{-1}$, $b = 10$ m, $c = 5\ ms^{-2}$.

a) Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!
b) Mekkora a sebessége a t = 0 időpontban?
c) Milyen távol van az origótól a t = 0 időpontban?
d) Mely időben éri el a tömegpont az xy síkot?

e) Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

Megoldás:

a) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j} + (-2ct+4a)\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + (-10t+12)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -2c\,\mathbf{k} = -10\,\mathbf{k}$

b) $\mathbf{v}(0) = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$, nagysága $v(0) = 3\sqrt{1^2+1^2+4^2} \approx 12{,}7\ \mathrm{m/s}$

c) $\mathbf{r}(0) = 10\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}$, távolsága az origótól $d = 10\sqrt{1^2+1^2+5^2} \approx 52\ \mathrm{m}$

d) az xy síkot akkor éri el, amikor z = 0, azaz

$-5t^2 + 12t + 50 = 0 \quad\Rightarrow\quad t_1 \approx 4{,}6\ \mathrm{s}$ (és $t_2 = -2{,}2$ s –ban is ott volt)

e) A mozgás síkmozgás, ha $Ax + By + Cz + D = 0$ teljesül minden t-re,

azaz $A(at+b) + B(at-b) + C(-ct^2+4at+5b) + D = (-Cc)t^2 + (Aa+Ba+Ca)t + (Ab-Bb+5Cb+D) = 0$,

vagyis $-Cc = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\left.\begin{aligned} Aa + Ba &= 0 \\ Ab - Bb + D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ D = -2Ab \end{cases}$$

Legyen A = 1, a sík egyenlete $x - y - 2b = 0$.

II.2. (fgy. 1.12.)

Egy repülőgép mozgását az

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(t/t_0)\,\mathbf{i} + 2a\sin(t/t_0)\,\mathbf{j}$$

függvény írja le, ahol $a = 200$ m, $t_0 = 2$ s.

a) Milyen pályán mozog a repülőgép?

b) Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a t = 0 és a t = 2 s időben?

Megoldás:

a) $x(t) = a\cos(t/t_0) = 200\cos 0{,}5t$

$y(t) = 2a\sin(t/t_0) = 400\sin 0{,}5t$

Fejezzük ki az első egyenletből $\cos(t/t_0)$-t, a másodikból $\sin(t/t_0)$-t. Mivel

$\left[\cos\frac{t}{t_0}\right]^2 + \left[\sin\frac{t}{t_0}\right]^2 = 1$, ezért $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2 = 1$, azaz egy ellipszisen mozog a repülőgép.

b) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -a/t_0 \sin(t/t_0)\,\mathbf{i} + 2a/t_0\cos(t/t_0)\,\mathbf{j} = -100\sin(t/2)\,\mathbf{i} + 200\cos(t/2)\,\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -a/t_0^2\cos(t/t_0)\,\mathbf{i} - 2a/t_0^2\sin(t/t_0)\,\mathbf{j} = -50\cos(t/2)\,\mathbf{i} - 100\sin(t/2)\,\mathbf{j}$

t = 0 –ban $\mathbf{v}(0) = 200\,\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(0) = -50\,\mathbf{i}$, $\mathbf{v}(0)\cdot\mathbf{a}(0) = 0 \quad\Rightarrow$ merőlegesek

t = 2s –ban $\mathbf{v}(2) = -100\sin 1\,\mathbf{i} + 200\cos 1\,\mathbf{j} = -84{,}15\,\mathbf{i} + 108{,}06\,\mathbf{j}$,

$\mathbf{a}(2) = -50\cos 1\,\mathbf{i} - 100\sin 1\,\mathbf{j} = -27{,}02\,\mathbf{i} - 84{,}15\,\mathbf{j}$,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}(2)\cdot\mathbf{a}(2)}{|\mathbf{v}(2)|\cdot|\mathbf{a}(2)|} = \frac{(-84{,}15)\cdot(-27{,}02) + (108{,}06)\cdot(-84{,}15)}{\sqrt{84{,}15^2+108{,}06^2}\cdot\sqrt{27{,}02^2+84{,}15^2}} = -0{,}58$$

$\Rightarrow \quad \alpha = 2{,}18\ \mathrm{rad} = 125°$

II.3. (fgy. 1.17.)

Két egymásra merőleges rezgés egyenlete:

$$x = 3A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Rajzoljuk le az eredő rezgés pályáját!

Megoldás:
x(t) –ből kifejezve $\sin(2\pi t/T) = x/(3A)$,
y(t)–t átalakítva és $\sin(2\pi t/T)$-t behelyettesítve

$$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -2A\sin\frac{2\pi}{T}t = -2A\cdot\frac{x}{3A} = -\frac{2}{3}x\,,$$

a pálya az $y = -2x/3$ egyenesnek a P_1 (-3A,2A) és P_2 (3A,-2A) pontok közötti szakasza

---

II.4.
Egy ágyúgolyó röppályájának pályafüggvénye

$$\mathbf{r}(t) = (at + b)\,\mathbf{i} + (gt^2 + ct + d)\,\mathbf{k}$$

ahol a kilövés a t = 0 s-ban történik, és
$a = 5\ ms^{-1}$, $b = 100$ m, $c = 10\ ms^{-1}$, $d = 200$ m, $g = -5\ ms^{-2}$

a) Honnan lőtték ki az ágyúgolyót?
b) Mekkora volt a kezdősebesség?
c) Mekkora a gyorsulás?
d) Mennyi idő alatt érkezik a földre?
e) Hol és melyik időpillanatban merőleges a sebességvektor a gyorsulásvektorra?

Megoldás:
a) t = 0 s-ban $\mathbf{r}(0) = b\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{k} = 100\,\mathbf{i} + 200\,\mathbf{k}$
b) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a\,\mathbf{i} + (2bt + c)\,\mathbf{k} = 5\,\mathbf{i} + (-10t + 10)\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{v}(0) = 5\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{k}$, $v_0 = \sqrt{5^2 + 10^2} \approx 11{,}2\ m/s$
c) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = 2b\,\mathbf{k} = -10\,\mathbf{k}$ (azaz szabadesés)
d) azaz a z = 0 síkot mikor éri el: $gt^2 + ct + d = -5t^2 + 10t + 200 = 0 \quad\Rightarrow\quad t \approx 7{,}4$ s
e) a két vektor ott merőleges, ahol a skalárszorzatuk nulla:
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 5\cdot 0 + (-10t + 10)\cdot(-10) = 100(t-1) = 0 \qquad\Rightarrow\qquad t = 1$ s,
$\mathbf{r}(1) = 105\,\mathbf{i} + 205\,\mathbf{k}$, ez a pálya csúcspontja
(gyorsabban megoldható a feladat a $v_z = -10t + 10 = 0$ feltételből)

II.5.
Egy tömegpont gyorsulását az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{a}(t) = 4a\sin(\omega t + \varphi_0)\,\mathbf{i} + 4b\sin\omega t\,\mathbf{j}$$

ahol $\omega = 2\ s^{-1}$, $\varphi_0 = \pi/2$
A test a $t_1 = \pi/4$ s-ban az $\mathbf{r_1} = a\,\mathbf{i} - b\,\mathbf{j}$ pontban van és sebessége $\mathbf{v_1} = 2a\,\mathbf{i}$ **.**

a) Adjuk meg $t_2 = 3\pi$ s-ban a test helyvektorát és a sebességét!
b) Mi a mozgás pályája?

Megoldás:

$a_x = 4a \sin(2t+\pi/2) = 4a \cos 2t = \dot{v}_x$

$\Rightarrow \quad v_x = 2a \sin 2t + k_1$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\;v_{1x} = 2a \;\Rightarrow\; k_1 = 0, \quad v_x = 2a \sin 2t = \dot{x}$

$\Rightarrow \quad x = -a \cos 2t + k_2$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\;x_1 = a \;\Rightarrow\; k_2 = a, \quad x = -a \cos 2t + a$

$a_y = 4b \sin 2t = \dot{v}_y$

$\Rightarrow \quad v_y = -2b \cos 2t + k_3$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\;v_{1y} = 0 \;\Rightarrow\; k_3 = 0, \quad v_y = -2b \cos 2t = \dot{y}$

$\Rightarrow \quad y = -b \sin 2t + k_4$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $\;y_1 = -b \Rightarrow\; k_4 = 0, \quad y = -b \sin 2t$

a) $\mathbf{r}(3\pi) = (-a \cos 6\pi + a)\,\mathbf{i} - b \sin 6\pi\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\quad \mathbf{v}(3\pi) = 2a \sin 6\pi\,\mathbf{i} - 2b \cos 6\pi\,\mathbf{j} = -2b\,\mathbf{j}$

b) $x(t) = a - a \cos 2t \quad \Rightarrow \quad \cos 2t = (a-x)/a$

$y(t) = -b \sin 2t\, j \quad \Rightarrow \quad \sin 2t = -y / b$

Felhasználva, hogy $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$: a pálya $\left(\dfrac{a-x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ ellipszis

---

II.6.

Egy tömegpont gyorsulását az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{a}(t) = 3r\omega^2 \sin \omega t\,\mathbf{i} + 4r\omega^2 \sin(2\omega t+\pi/2)\,\mathbf{j}$$

ahol $\omega = 1\ s^{-1}$, $r = 2$ m.

A test a $t_0 = 0$ s-ban az $\mathbf{r}_0 = -2\,\mathbf{j}$ pontból indul $\mathbf{v}_0 = -6\,\mathbf{i}$ sebességgel.

a) Mi a mozgás pályája?

b) Adjuk meg t = 3 s-ban a sebesség nagyságát és irányát!

II.7.

Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{v}(t) = 0{,}2\, e^{0{,}1t}\,\mathbf{i} - 2{,}8 \sin 4t\,\mathbf{j} + (3-4t)\,\mathbf{k}$$

(Az idõt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.)

Kipukkadásakor, t = 0 s-ban a lufi az $\mathbf{r} = 2\,\mathbf{i} + 1{,}4\,\mathbf{j} + 1{,}5\,\mathbf{k}$ pontból indult.

a) Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?

b) Mekkora távolságra van a kipukkadás helyétõl?

c) Mekkora ekkor a gyorsulása?

d) A lufi egy olyan 3×3×3 m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordinátarendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

III. Anyagi pont mozgásának leírása polárkoordináta-rendszerben

$\mathbf{r}(t) = r \cdot \mathbf{e_r}$

$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \cdot \mathbf{e}_r + r \cdot \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \cdot \mathbf{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi$,

azaz $v_r = \dot{r}$, $v_t = r\dot{\varphi} = r\omega$,

körmozgásnál $v_r = 0$, $v_t = r\omega$.

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \cdot \mathbf{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \cdot \ddot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \ddot{r} \cdot \mathbf{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \cdot \ddot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi - r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \mathbf{e}_r =$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

azaz $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$, $a_t = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2\dot{r}\omega + r\beta$,

körmozgásnál $a_r = -r\omega^2 = -v_t^2/r$, $a_t = r\beta$.

III.1. (fgy. 1.14.)

Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebességének felét. Hol áll meg?

Megoldás:

$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot{\varphi} = \omega_0 - \beta t, \quad \varphi = \omega_0 t - \beta/2 \cdot t^2$

először t_1 idő alatt a sebessége a felére csökken: $\omega(t_1) = \omega_0 - \beta t_1 = \omega_0/2$ (1)

és megtesz egy félkört, azaz $\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 - \beta/2 \cdot t_1^2 = \pi$ (2)

majd t_2 idő alatt a sebessége $\omega_0/2$-ről nullára csökken: $\omega(t_2) = \omega_0/2 - \beta t_2 = 0$ (3)

(1)-ből $t_1 = \omega_0/(2\beta)$, (3)-ból $t_2 = t_1$, (2)-ből $\beta = 3/(8\pi) \cdot \omega_0^2$, amivel $\varphi(t_2) = \omega_0/2 \cdot t_2 - \beta/2 \cdot t_2^2 = \pi/3$, azaz még egy hatod kört tesz meg.

III.2. (fgy. 1.13.)

Egy R sugarú kerék szíjáttétellel hajt egy tőle d távolságban levő kereket. Adjuk meg a két kerék azon pontjainak távolságát az idő függvényében, amelyek a t = 0 időpontban a legközelebb vannak egymáshoz!

III.3. (fgy. 1.15.)

Állandó ω szögsebességgel forgó R sugarú tárcsa egy l hosszúságú csuklósan rögzített rúddal dugattyút mozgat.

Határozzuk meg a dugattyú helyének időfüggését!

Harmonikus rezgőmozgást végez-e a dugattyú?

III.4.

A kancsal fecske szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül. A fecske sebessége állandó (v). Odaér-e valaha a fészkére?

ÁBRA

Megoldás:

Polárkoordináta-rendszerben a sebesség radiális komponense $v_r = \dot{r}$, tangenciális komponense $v_t = r\dot{\varphi}$. Bontsuk fel a fecske sebességét radiális és tangenciális komponensre:

$v_r = v \cos \alpha$, $v_t = v \sin \alpha$, ezzel

(1) $\dot{r} = v \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad r = d - vt \cos \alpha$, a fecske távolsága a fészektől lineárisan csökken,

és $t = d / (v \cos \alpha)$ idő alatt $r = 0$, a fecske beér a fészkébe!

(2) $r\dot{\varphi} = v \sin\alpha$

[α a fecske kancsalságának szöge, ez konstans,
φ a fészektől a fecskéhez t időben húzott sugárnak a 0 időben húzott sugárral bezárt szöge]

r-t behelyettesítve $\quad (d - vt\cos\alpha)\dfrac{d\varphi}{dt} = v\sin\alpha$,

szeparálva $\displaystyle\int \frac{1}{d - v\cos\alpha\cdot t}\,dt = \frac{1}{v\sin\alpha}\int d\varphi$

és integrálva $\quad \dfrac{1}{-v\cos\alpha}\ln\dfrac{d - v\cos\alpha\cdot t}{d} = \dfrac{\varphi}{v\sin\alpha}$,

amiből $\quad \varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{d}t\right)$.

$t \to \dfrac{d}{v\cos\alpha}$ esetén ez a függvény végtelenhez tart, vagyis a fecske végtelen sokat kering, amíg beér a fészkébe, de ezt véges idő alatt teszi!

Határozzuk meg a fecske pályáját!
Az egyik lehetőség, hogy az r(t), φ(t) függvényekből kiküszöböljük t-t:

$r = d - vt\cos\alpha \;\Rightarrow\; t = (d-r)/(v\cos\alpha)$ és $\quad \varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{d}\cdot\dfrac{d-r}{v\cos\alpha}\right) = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\ln\dfrac{r}{d}$;

a másik lehetőség, hogy az (1) és (2) differenciálegyenletet elosztjuk egymással:

$$\frac{v_t}{v_r} = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{v\sin\alpha}{-v\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha, \text{ szeparáljuk: } \int_0^{\varphi} d\varphi = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\int_d^r \frac{1}{r}dr \text{ és integráljuk:}$$

$$\varphi = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\ln\frac{r}{d}$$

Ez az ún. logaritmikus spirális egyenlete, melynek jellemzője, hogy egy-egy teljes fordulatot megtéve a középponttól mért távolság mértani sor szerint (mindig ugyanannyiad részére) csökken:

r-et kifejezve φ(r)-ből $\quad r = d\cdot e^{-\varphi/\mathrm{tg}\alpha}$, $\quad \dfrac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{\varphi_2}{\mathrm{tg}\alpha}+\frac{\varphi_1}{\mathrm{tg}\alpha}}$,

egy fordulatot megtéve $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$, $\quad$ így $\quad \dfrac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{2\pi}{\mathrm{tg}\alpha}} = \text{konst.}$

III.5.
R sugarú autókerékre rátapadt egy kavics. t = 0 –ban a kavics pont az úttesten van (z = 0). Az autó sebessége v. Adjuk meg a kavics helyvektorát (sebességét, gyorsulását) az idő függvényében!

Dinamika

IV. Mozgásegyenlet

IV.1. (fgy. 1.19.; de egy adat inkonzisztens volt!)
Egy m = 1 g tömegű test a t_1 = 2 s időben az x tengely pozitív felén van az origótól x_1 = 10 cm-re, sebessége a +y tengely irányába mutat és nagysága v_1 = 10 cm/s. A test a t_2 = 5 s időpontban a P_2(-0,5 cm, 15 cm, 0) pontban van, a sebessége a –x tengely irányába mutat és nagysága v_2 = 7 cm/s. A testre állandó erő hat.
Mekkora az erő nagysága?
Mekkora a test sebessége a t_3 = 8 s időpontban, és hol lesz a test akkor?

Megoldás:
mivel $\mathbf{F}$ = konst. $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}/m$ = konst.
$\Rightarrow$ kiintegrálva a sebesség és a helyvektor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{v}(0)$, $\mathbf{r}(t) = ½\,\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}(0)t + \mathbf{r}(0)$
t_1 = 2 s: $\mathbf{r}(2) = ½\,\mathbf{a}\cdot 2^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 2 + \mathbf{r}(0) = 0{,}1\,\mathbf{i}$, $\mathbf{v}(2) = \mathbf{a}\cdot 2 + \mathbf{v}(0) = 0{,}1\,\mathbf{j}$
t_2 = 5 s: $\mathbf{r}(5) = ½\,\mathbf{a}\cdot 5^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 5 + \mathbf{r}(0) = -0{,}005\,\mathbf{i} + 0{,}15\,\mathbf{j}$, $\mathbf{v}(5) = \mathbf{a}\cdot 5 + \mathbf{v}(0) = -0{,}07\,\mathbf{i}$

$\Rightarrow$ a sebességekből $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = -\dfrac{0{,}07}{3}\mathbf{i} - \dfrac{0{,}1}{3}\mathbf{j}$ és

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(t_1) - at_1 = \mathbf{v}(t_2) - at_2 = \frac{0{,}14}{3}\mathbf{i} + \frac{0{,}5}{3}\mathbf{j},$$

a helyvektorokból $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t_1) - 1/2\,\mathbf{a}t_1^{\,2} - \mathbf{v}(0)\cdot t_1 = \mathbf{r}(t_2) - 1/2\,\mathbf{a}t_2^{\,2} - \mathbf{v}(0)\cdot t_2 = \dfrac{0{,}16}{3}\mathbf{i} - \dfrac{0{,}80}{3}\mathbf{j}$.

Ezeket felhasználva

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{0{,}07^2 + 0{,}1^2} = \frac{\sqrt{0{,}0149}}{3} \approx 0{,}04\ \mathrm{m/s},\quad F = ma \approx 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}04\ \mathrm{m/s} = 4\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N},$$

és t_3 = 8 s-ban $\mathbf{v}(8) = \mathbf{a}\cdot 8 + \mathbf{v}(0) = -\,0{,}14\,\mathbf{i} - 0{,}1\,\mathbf{j}$, $v(8) = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}1^2} \approx 0{,}17\ \mathrm{m/s}$,
$\mathbf{r}(8) = ½\,\mathbf{a}\cdot 8^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 8 + \mathbf{r}(0) = \ldots = -\,0{,}32\,\mathbf{i}$ [m]

IV.2. (fgy. 1.20.)
Két anyagi pont, A és B kölcsönhatásban van egymással. Az A pontra még egy, az A-t és B-t összekötő egyenesre merőleges F_1 erő hat. A B pont gyorsulása $\mathbf{a}_B$.
Mennyi az A pont gyorsulása?

Megoldás:
Ha a B pont gyorsulása $\mathbf{a}_B$, akkor a rá az A testtől ható erő $\mathbf{F}_{BA} = m_B\,\mathbf{a}_B$ (Newton II.), vagyis az A testre a B testtől ható erő $\mathbf{F}_{AB} = -\,\mathbf{F}_{BA}$ (Newton III.), és az A testre ható eredő erő $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{AB}$ (Newton IV.), melynek nagysága $F_A = \sqrt{F_1^{\,2} + F_{AB}^{\,2}}$, mivel a két erő merőleges.

Ezekből az A test gyorsulásának nagysága $a_A = \dfrac{\sqrt{F_1^{\,2} + (m_B a_B)^2}}{m_A}$.

IV.3 (fgy. 1.26.)
Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő
a) mindig merőleges a test sebességére, akkor a test sebességének nagysága nem változik!
b) mindig egyező irányú a test sebességével, akkor a test sebességének iránya nem változik!

Megoldás:

a) $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, így ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{F}$ merőlegesek, akkor $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ merőlegesek, skalárszorzatuk zérus. Másrészt $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, így $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 0$. Vegyük észre, hogy $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = d(\mathbf{v}^2)/dt = d(v^2)/dt$, vagyis a sebesség négyzete konstans, azaz a sebesség nagysága konstans.
b) …

IV.4. (fgy. 1.23.)
m tömegű tömegpont mozog az xy síkban. A tömegpontra a sebességével arányos és arra merőleges erő hat, az arányossági tényező β. Az erő is benne van az xy síkban.
Írjuk fel a test mozgásegyenletét!
Milyen pályán mozog a test?

V. Hajítások

A testre állandó erő hat, így a gyorsulása is állandó: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \text{konst.}$
Mivel hajítás esetén a Földön $\mathbf{F} = -\,g\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{a} = -\,g\,\mathbf{k} = \dot{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = -\,g\,t\,\mathbf{k} + \mathbf{v_0} = \dot{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = -\,½\,g\,t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{v_0}\,t + \mathbf{r_0}$.
Forgassuk úgy a koordinátarendszerünk tengelyeit, hogy
$\mathbf{v_0} = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0z}\,\mathbf{k} = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \sin\alpha\,\mathbf{k}$ (α a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge),
és legyen $\mathbf{r_0} = \mathbf{0}$,
ekkor $\mathbf{v} = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha - g\,t)\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = v_0\,t \cos\alpha\,\mathbf{i} + (v_0\,t \sin\alpha - ½\,g\,t^2)\,\mathbf{k}$.

A hajítás pályája:
$x(t) = v_0\,t \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad t = x / (v_0 \cos\alpha)$,
$z = v_0\,t \sin\alpha - ½\,g\,t^2 = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot x - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$, parabola.
A hajítás magassága:
$z = \max.$, amikor $v_z = 0 \;\Rightarrow t_h = v_0 \sin\alpha / g$, $\quad h = z(t_h) = \dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$.
A hajítás távolsága (azonos z indulási és érkezési magasság esetén):
$t_d = 2\,t_h$ (mivel a pálya szimmetrikus), $\quad d = x(t_d) = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$;
vagy a pálya egyenletéből: $z = 0$, ha $x = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ (ill. $x = 0$ a kiindulási pont).

V.1. (fgy. 1.6.)
Egy 360 km/h vízszintes sebességű, magasan repülő repülőgépről kiejtenek egy tárgyat. Milyen kezdősebességgel kell 10 s-mal később egy másik tárgyat utánadobni, hogy az 14 s múlva találja el a kiejtett tárgyat?

Megoldás:
$v_r = 360$ km/h = 10 m/s, tegyük fel, hogy a gép az x tengely irányában repül:
az első test helyvektora $\quad \mathbf{r_1}(t) = \mathbf{r_0} + v_r\,t\,\mathbf{i} - ½\,g\,t^2\,\mathbf{k} = \mathbf{r_0} + 10\,t\,\mathbf{i} - 5\,t^2\,\mathbf{k}$,
a másodiké $\quad \mathbf{r_2}(t) = \mathbf{r_0} + v_r\,t\,\mathbf{i} - ½\,g\,(t\text{-}10)^2\,\mathbf{k} = \mathbf{r_0} + 10\,t\,\mathbf{i} + [v\,(t\text{-}10) - 5\,(t\text{-}10)^2]\,\mathbf{k}$
(a tárgy vízszintes sebessége nem változik, akár a gépen van, akár szabadon esik, mivel a közegellenállás elhanyagolható).

Mivel $\mathbf{r}_1(14) = \mathbf{r}_2(14)$, $-5\cdot 14^2 = v\cdot 4 - 5\cdot 4^2$ $\Rightarrow$ $v = -225$ m/s

---

V.2 (fgy. 1.7.)
Egy $h = 40$ m magas torony tetejéről $\alpha = 45°$-os szög alatt (felfelé) elhajítanak egy testet $v_0 = 40$ m/s kezdősebességgel. Mekkora a távolság a kiindulási és földreérkezési pont között?

Megoldás:
A test függőleges elmozdulása: $z(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - ½ g t^2 = 40 - 40 \cdot \sin 45° \cdot t - 5 \cdot t^2$,
földetéréskor $z(t^*) = 0$ $\Rightarrow$ $t^* = 6{,}83$ s ;
vízszintes elmozdulása: $x(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t = 40 \cdot \cos 45° \cdot t$,
földetéréskor $x(t^*) = 193{,}1$ m .
A távolság a kiindulási és földetérési pont között $d = \sqrt{40^2 + 193{,}1^2} \approx 197{,}2$ m

---

V.3. (fgy. 1.8.)
Két ferde hajítás kezdősebességének nagysága és a hajítás távolsága azonos. Az egyik hajítás maximális magassága a másikénak négyszerese.
Számítsuk ki a hajítási idők arányát!

Megoldás:
$v_{01} = v_{02}$, $d_1 = v_{01}^2 \sin 2\alpha_1 /g = d_2 = v_{02}^2 \sin 2\alpha_2 /g$ és
$h_1 = v_{01}^2 \sin^2 \alpha_1 / (2g) = 4 h_2 = 4 \cdot v_{02}^2 \sin^2 \alpha_2 / (2g)$.

Az utóbbiból $\sin^2 \alpha_1 = 4 \sin^2 \alpha_2$ $\Rightarrow$ $\sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_2$ $\Rightarrow$ $\dfrac{t_{h1}}{t_{h2}} = \dfrac{\dfrac{v_{01} \sin\alpha_1}{g}}{\dfrac{v_{02} \sin\alpha_2}{g}} = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 2$

(Az elsőt hozzávéve
$\sin 2\alpha_1 = 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = 2\sin\alpha_2\cos\alpha_2$ $\Rightarrow$ $2\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $\alpha_1 = 63{,}4°$, $\alpha_2 = 26{,}6°$, de ez nem volt kérdés.)

V.4. (fgy. 1.9.)
Béni áll az emeleti erkélyen. Abban a pillanatban, amikor Frédi kilép az utcára (sebessége $v_F = 1$ m/s) Béni $v_0 = 2$ m/s sebességgel elhajít egy hógolyót.
a) Milyen szögben kell elhajítania, hogy a hógolyó Frédi fejére essen?
b) Mennyi idő múlva találja el?
c) A kaputól milyen távolságra találja el?
d) Frédi felmegy az utca másik oldalán levő ház erkélyére és megcélozza a vele egy magasságban levő barátját. Béni megijed, az elhajítás pillanatában leugrik az erkélyről. (szabadesésnek vegyük!). Mi történik, ha Frédi $v_0' = 20$ m/s kezdősebességgel vízszintesen hajított?
e) Mekkora minimális v_0' kezdősebességgel Frédinek vízszintesen hajítania, hogy még éppen eltalálja Bénit?

ÁBRA!!!

Megoldás:
A hógolyó akkor esik Béni fejére, amikor a hógolyó és Frédi fejének helyvektora megegyezik.

Frédi fejének magasságát vegyük $z = 0$ –nak;
Frédi fejének vízszintes elmozdulása $x_F = v_F \cdot t = t$;
a hógolyó vízszintes elmozdulása $x_h = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = 2t \cdot \cos\alpha$;
a hógolyó függőleges elmozdulása $z_h = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - ½\, g\, t^2 = 2t \cdot \sin\alpha - 5\, t^2$.
a) A vízszintes elmozdulások egyenlőségéből
$\cos\alpha = ½$, $\alpha = 60°$, a hógolyó mindig Frédi feje fölött van.
b) A hógolyó függőleges koordinátája zérus: $2t \cdot \sin 60° - 5\, t^2 = 0 \Rightarrow t \approx 1{,}2$ s.
c) Bármelyik vízszintes elmozdulásból $x_F = x_h = 1{,}2$ m.
d) Most Béni fejének és a másik hógolyónak a helyvektorát kell felírni:
Béni feje: $x_B = 0$, $z_B = h - ½\, g\, t^2 = 5 - 5t^2$,
a második hógolyó: $x_{h2} = d - v_0'\, t = 10 - 20t$, $z_{h2} = 5 - 5t^2$.
Ekkor tehát Béni feje és a hógolyó mindig egy magasságban van – a kérdés tehát az, hogy vízszintesen átér-e a hógolyó Béni fejéhez, mielőtt leesnének a z = 0-ra:
$5 - 5t^2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$ s alatt esnek le,
de $x_{h2} = 10 - 20t = 0 \Rightarrow t = 0{,}5$ s alatt a hógolyó már eléri Béni fejét
és eltalálja $z_B = z_{h2} = 5 - 5t^2 = 3{,}75$ m magasságban.
e) Ahhoz, hogy maximum $t_0 = 1$ s alatt $x_{h2} = d - v_0^*\, t = 0$ legyen, $v_0^* \geq 10$ m/s.

V.5. (fgy. 1.10.)
Melyek azok a pontok, amelyekből elejtve az A golyót, az a 45°-os lejtőről rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan?

Megoldás:
A golyó a lejtő fölött h magasságból indul, így a lejtőre érkezéskor v* (függőleges irányú) sebessége lesz:

$$z = -h = -1/2\, g\, t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad v^* = gt_1 = \sqrt{2gh}\,.$$

A lejtőről való elpattanáskor ez lesz a vízszintes irányú kezdősebessége, mivel a lejtő 45°-os.
Egyenesen a lejtő aljába pattan, így vízszintesen $x = v^*\, t_2$, függőlegesen $z = ½\, g\, t_2^2$ utat tesz meg, és mivel a lejtő 45°-os, $x = z$, azaz $v^*\, t_2 = ½\, g\, t_2^2$.
Ebből $t_2 = 2v^*/g$ és $x = z = 2\, v^{*2} / g$, v^*-t beírva $x = z = 4h$,
azaz azok a pontok, ahonnan elejtve a golyót, az a lejtőn rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan, a $z = 5/4\, x$ egyenes pontjai.

V.6. (fgy. 1.11.)
Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítai egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

Megoldás:
h = d: $v_0^2 \sin^2\alpha / (2g) = v_0^2 \sin 2\alpha / g \Rightarrow 2 \sin 2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 4 \Rightarrow \alpha \approx 76°$

V.7.
A 200 m magas (tűszerűen keskeny) hegy talppontjától 500 m-re lévő ágyú irányzékát milyen (legkisebb) szögre kell állítani, hogy a golyó átrepüljön fölötte?
Mennyi idő telik el, amíg a golyó a csúcs fölé ér?
A golyó kezdősebessége $v_0 = 1000$ m/s.

Megoldás:
vízszintesen $x = v_0 t \cos\alpha$: $500 = 1000 t \cos\alpha \Rightarrow t\cos\alpha = 0{,}5$
függőlegesen $z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$: $200 = 1000 t \sin\alpha - 5t^2 \Rightarrow t\sin\alpha = t^2/200 + 0{,}2$
Felhasználva, hogy $(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2 = t^2$, egy t^2-ben másodfokú egyenletet kapunk:
$0{,}25 + t^4/40000 + 0{,}002\, t^2 + 0{,}04 = t^2$, amiből $t_1 = 0{,}539$ s és $t_2 = 199{,}8$ s.
A megfelelő szögek: $\alpha_1 = 21{,}93°$ (ez a minimális) és $\alpha_2 = 89{,}86°$ (ezt már veszélyes kipróbálni!)

V.8.
Egy függőlegesen feldobott kő sebessége 2 s múlva 4 m/s. Mekkora volt a kő kezdősebessége és milyen maximális magasságot ért el a kő?

V.9.
Egy lejtő legalsó pontjából, az origóból 60°-os szögben eldobtunk egy golyót és az az előttünk levő lejtő (4,3) pontjába érkezett. Mekkora kezdősebességgel dobtuk el a golyót?

V.10.
Adott v_0 kezdősebességgel, h magasságból milyen szög alatt kell elhajítani egy testet, hogy az a lehető legmesszebb érjen földet?

VI. Kényszererő: lejtő, kötél

Kötélerő: kötélirányú, nemnegatív.
Nyomóerő: mindig a felületre merőleges.
Csúszási/gördülési súrlódási erő: a mozgással ellentétes irányú, nagysága
$F_s = \mu \cdot F_{ny}$, F_{ny} a nyomóerő.
Tapadási súrlódási erő: $F_t \leq \mu_t \cdot F_{ny}$.
Lejtő: a mozgásegyenletet a lejtő síkjában és arra merőlegesen írjuk fel. A gravitációs gyorsulás lejtő irányú komponense $g\cdot\sin\alpha$, lejtőre merőleges komponense $g\cdot\cos\alpha$ (α a lejtő hajlásszöge).
A lejtőre merőlegesen $ma_\perp = F_{ny} - mg\cdot\cos\alpha$. Mivel a test a lejtőn mozog, a lejtőre merőleges gyorsulás zérus, így $F_{ny} = mg\cdot\cos\alpha$.

1.22.
Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel.
Mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításkor a traktor 1 perc alatt gyorsít fel 40 km/h sebességre? (A traktor húzóereje konstans.)
A traktor tömege M = 3000 kg, egy pótkocsi tömege m = 2000 kg, gördülő ellenállási együttható $\mu = 0{,}1$.

Megoldás:
Mivel a kötelek nyújthatatlanok, a traktor és a két pótkocsi gyorsulása megegyezik:
$a = \Delta v / \Delta t = (40/3{,}6) / (1\cdot 60) \approx 0{,}185$ m/s.
A traktor húzóereje F_h, a traktor és az első pótkocsi közötti kötélben érbredő erő K_1, az első és a második pótkocsi közötti kötélben érbredő erő K_2; a három mozgásegyenlet:
$Ma = F_h - K_1 - \mu Mg$
$m_1 a = K_1 - K_2 - \mu m_1 g$

$m_2a = K_2 - \mu m_2g$

Ezekből $K_2 = 2370$ N, $K_1 = 4740$ N (és $F_h = 8296$ N).

1.21.

Csigán átvetett nyújthatatlan kötél egyik végén $m_1 = 2$ kg, másikon $m_2 = 1$ kg tömegű test lóg. A kötél súrlódásmentesen mozoghat.

Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenleteit!

Határozzuk meg a kötélben fellépő feszítőerőt és az egyes testek gyorsulását!

(A csiga tömege elhanyagolható.)

Megoldás:

m_1 gyorsulása a_1, m_2 gyorsulása a_2, és mivel $m_1 > m_2$, a rendszer m_1 felé fog gyorsulni:

$m_1a_1 = m_1g - K$

$m_2a_2 = K - m_2g$

Mivel a csiga tömege elhanyagolható és a kötél nyújthatatlan és súrlódásmentesen mozog,

$a_1 = a_2 = a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$ és $K = \dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$

1.25.

Mekkora F erő szükséges ahhoz, hogy állandó gyorsulással t = 2 s alatt nyugalmi helyzetből indulva felhúzzunk egy m = 6 kg tömegű testet egy $\alpha = 30$ °-os, h = 1 m magas lejtőn, ha a súrlódási együttható 0,2?

Megoldás:

A lejtő hossza, azaz a megtett út $s = h / \sin\alpha = 2$ m.

$v_0 = 0$, így $s = ½\, a\, t^2 \Rightarrow a = 2s/t^2 = 1\ m/s^2$.

A mozgásegyenlet $ma = F - mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha$

$\Rightarrow F = m\,(a+g\sin\alpha+\mu g\cos\alpha) = 6\cdot(1+10\cdot\sin30°+0{,}2\cdot10\cdot\cos30°) = 46{,}4$ N.

1.24.

Vízszintes asztallapon kiskocsi mozog. A kiskocsit egy csigán átvetett kötélre akasztott súly mozgatja. ÁBRA

m = 100 g esetén a kocsi 3 s alatt,

m = 200 g esetén a kocsi 1 s alatt teszi meg az 1 m-es utat nyugalmi helyzetből kiindulva.

Mekkora a kocsi tömege és mekkora a súrlódási együttható?

VII. Körmozgás, harmonikus rezgőmozgás

1.18.

R sugarú félgömb tetejéről (A pont) súrlódásmentesen csúszik le egy golyó.

a) Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét! Bonstuk fel a golyóra ható erőket és a gyorsulást érintőleges és radiális komponensekre!
b) Mekkora a golyó szögsebessége a B pontnál?
c) Mekkora erővel nyomja a golyó a gömböt a B pontnál?

d) A golyó a C pontnál hagyja el a gömböt. Mekkora az α_0 szög?
e) Mennyi a golyó sebessége a C pontnál?
f) A golyó a D pontnál ér földet. Milyen távol van a D pont a félgömbtől?

ÁBRA

1.39.
Kúpinga hossza ℓ, a kúpszög 2α. Mekkora a keringési idő?

1.36.
Egy R = 10 cm sugarú gömb belsejében a sugár fele magasságában elhelyezkeő vízszintes síkban egy golyó kering. Számítsuk ki a keringési időt!

1.33.
Egy R sugarú félgömb peremétől súrlódásmentesen legördülő m tömegű golyó mekkora erővel nyomja a félgömb fenekét?

1.34.
Függőleges síkban körrpályán haladó repülőgép sebessége 1080 km/h. Mekkora legyen a pálya sugara, hogy a legfelső pontban a pilóta „súlytalan" legyen?

1.35.
Az $y = 0{,}5\ x^2\ cm^{-1}$ egyenletű parabola y tengely körüli forgatásával nyert paraboloid belsejében az y = 2 cm és az y = 4,5 cm magasan elhelyezkedő síkokban két golyó kering.
a) Milyen sebességgel keringenek?
b) Mennyi idő alatt tesznek meg egy-egy fordulatot?

1.37.
Egy ω szögsebességgel forgó vízszintes korongon egy m tömegű anyagi pont helyezkedik el. A tapadási súrlódási tényező μ. Milyen r sugáron belül marad a koronghoz képest nyugalomban a fenti tömegpont?

1.38.
M és m tömegpontokat súlytalan rúd köt össze. Mindketten forgó korongon helyezkednek el. A rúd átmegy aközépponton, amelytől m r, M pedig R távolságra van. A súrlódási tényező μ. Milyen ω szögsebesség alatt marad nyugalomban a fenti rendszer a koronghoz képest?

1.40.
Milyen távolságban keringenek a Föld középpontjától az álló műholdak? (Szögsebességük megegyezik a Föld szögsebességével.)

1.41.
Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétfélképpen:
- a gravitációs erőtörvényt,
- a körmozgás adatait

felhasználva. A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának ($R_F \approx 6400$ km), a Hold keeringési ideje 27 nap.

1.42.
Milyen magasra emelkedik a Hold felszínéről v_0 sebességgel függőlegesen kilőtt test? Mennyi legyen v_0, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét?

A Hold sugara 1888 km, a Hold felszínén a gravitációs gyorsulás 1,6 m/s^2.
Számítsuk ki a szökési sebesség értékét a Földre is!

1.43.
A Szaturnusz gyűrűje 3 fő részből áll: a külső, a belső és a fátyolgyűrűből. A gyűrűk sugarai úgy aránylanak egymáshoz, mint 2,6 : 2 : 1,4. Adjuk meg szögsebességeik arányát!

1.16.
h magasságú tégla felső éléhez (O pont) l = 2 h hosszúságú matematikai ingát akasztunk, és az ingát φ_1 szöggel kitérítve elengedjük.
Milyen mozgást végez az m tömegű pont?
Ábrázoljuk –kis kitérésekre szorítkozva– a φ szöget az idő függvényében!

1.27.
k rugóállandójú, l_0 nyugalmi hosszúságú rugóra m tömegű testet akasztunk. Bizonyítsuk be, hogy a test a rugó és a nehézségi erő együttes hatása alatt harmonikus rezgőmozgást végezhet! Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet és a rezgésidőt!

VIII. Közegellenállás

1.28.
h = 6 m mély vízmedence tetején r = 1,5 mm sugarú golyót $v_0 = 0$ kezdősebességgel elengedünk. A golyóra a súlyán kívül még egy $F_k = 6\pi\eta rv$ nagyságú fékező erő is hat, ahol v a golyó sebessége, $\eta = 0{,}01\ \mathrm{g\ cm^{-1}s^{-1}}$. (A golyó sűrűsége $\rho = 2\ \mathrm{g/cm^3}$.)
a) Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét, és adjuk meg annak általános megoldását!
b) Ábrázoljuk a golyó sebességét és megtett útját az idő függvényében!
c) Mennyi idő alatt és milyen sebességgel ér le a golyó a medence fenekére?
d) Mennyi a golyó átlagsebessége, és hol éri el ezt a sebességet?
e) Oldjuk meg az a), b), c) és d) feladatokat arra az esetre is, ha $v_0 = 10$ m/s, és függőlegesen lefelé irányul!

1.29.
Mekkora út megtétele után áll meg egy vízszintes úton haladó gépkocsi a motor kikapcsolása után, ha rá a súrlódási erőn kívül a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő is hat? (A gépkocsi tömege m = 600 kg, sebessége a motor kikapcsolásának pillanatában $v_0 = 80$ km/h, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a közegellenállási erő 40 km/h sebességnél 500 N.)
Milyen húzóerőt képes a gépkocsi motorja kifejteni, ha a maximális sebesség 100 km/h?

1.30.
Írjuk fel a mozgásegyenletét egy 2 rugóval kifeszített m = 3 kg tömegű testnek, ha csak az AB egyenes mentén történő mozgásokra szorítkozunk! ÁBRA

A két rugó erőállandója	$k_1 = 100$ din/cm	$k_2 = 200$ din/cm	****SI!!!***
nyugalmi hosszaik	$l_{01} = 10$ cm	$l_{02} = 12$ cm.	

1. óra Kinematika (anyagi pont)
Koordinátarendszer kiválasztása: 1.1, 1.2, 1.4 b).
Házi feladat: 1.6 és 1.4 a).
Anyagi pont mozgásának leírása Descartes féle koordinátarendszerben, r = r (t), pillanatnyi és átlagsebesség, gyorsulás. Vektorok. 1. 5 feladat.
Házi feladat: 1.12.

2. óra

Házi feladatok megoldása. Polárkoordinátarendszer.

Házi feladat: kancsal fecske (olyan síkmozgás, ahol a sebesség nagysága állandó és a rádiuszvektorral állandó szöget zár be).

Dinamika: mozgásegyenlet. Hajítások: 1.7, 1.9.

Házi feladat: 1.8, 1.10.

3. óra

Házi feladatok megoldása. Új: 1.19. Kényszererő: lejtő, kötél. 1.25, 1.21, 1.26 megoldása polárkoordinátás alakban.

Házi feladat: 1.22, 1.23*, 1.24. (* az 1.23 egyszerűbb polárkoordinátában!)

4. óra

Házi feladatok megoldása. Új: körmozgás, harmonikus rezgőmozgás. Példák: 1.18 (gömbről lecsúszó golyó), 1.39 (kúpinga), 1.36 (félgömbben keringő golyó).

Házi feladat: 1.33, 1.34, 1.35.

5. óra

Házi feladatok megoldása. Közegellenállás. Készülés az 1. ZH-ra.

6.óra 1.ZH anyaga:

1. Kinematika r = r (t)

2. Hajítások

3. Dinamika: mozgásegyenlet integrálása

4. Körmozgás

5. Harmonikus rezgőmozgás

6. Közegellenállás (amely tank319öröknél erre sor került)

7. óra

Az első ZH példáinak megoldása.

Munkatétel. Konzervatív erőtér. Mechanikai energia megmaradás.

1.47, 1.42, 1.51: az órán elkezdeni, házi feladat befejezni.

8. óra

Házi feladat megoldása. A munka, mint görbementi integrál.

Potenciál, potenciálgradiens. Örvényes és örvénymentes erőtér.

1.56 (1-4), 1.57 (1-4) (Egy részük legyen házi feladat).

9. óra

Házi feladat megoldása. Pontrendszerek. Impulzus tétel és impulzus megmaradás. Tömegközéppont.

2.6 és 2.7. Házi feladat: 2.4 (Kúp súlypontja)

Rugalmas és rugalmatlan ütközés.

10. óra

Házi feladat megoldása. Impulzus momentum és impulzus momentum megmaradás. Tehetetlenségi nyomaték. Steiner tétel. Lapos lemez tehetetlenségi nyomatéka.

2.16, 2.18.

Házi feladat: 2.23, 2.22.

Henger legördülése lejtőn.

11. óra

Házi feladatok megoldása. Fizikai inga. Merev testek ütközése vízszintes súrlódásmentes síkon rögzített tengely körüli forgással kombinálva. Lényeg a megmaradási törvények hangsúlyozása.

Készülés a 2. ZH-ra.

12. óra 2. ZH példa anyaga:

1. Mechanikai energia megmaradás

2. Munkatétel. Munka, mint vonalmenti integrál

3. Konzervatív erőtér, rot F=0. Potenciálgradiens.

4. Tehetetlenségi nyomaték, súlypont: fizikai inga.

5. Impulzus megmaradás, impulzus tétel.

6. Impulzus momentum megmaradás, impulzus momentum tétel.

13. óra

pót ZH

14. óra

ZH példák megoldása. Megmaradási törvények a fizikában. Szimmetriák (vagy más érdekes téma).