ZH2 2003. dec. 5.

1. Adott a következő erőtér:

$\mathbf{E} = -2(xy + z)\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} - (ax + 5)\,\mathbf{k}$

a. a = 4 esetén mennyi munkát végez az erőtér, ha egy m = 3 kg tömegű testet mozgat a $P_1(0,6,5)$ pontból a $P_2(5,-9,10)$ pontba az $\mathbf{r}(t) = (t+2)\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j} + (t^2+1)\,\mathbf{k}$ görbe mentén?
b. Hogyan kell megválasztani az „a" paraméter értékét, hogy legyen a fenti erőtérnek potenciálja?
c. Számoljuk ki ennél a paraméternél a potenciált!

2. Münchhausen báró a következő történetet adta elő arról, hogyan kémlelte ki az ellenség készülődését csata előtt:
- Tegnap délben felrepültem egy ágyúgolyóval a váruk fölé, körülnéztem a levegőből, megszámoltam, hányan vannak, milyen a fegyverzetük. Aztán, mikor éppen a vár közepe fölött voltam 40 m magasan, jött szembe egy másik ágyúgolyó, arra átpattantam egy szempillantás (azaz 0,01 s) alatt, és kirepültem vele a vár falain kívülre. Ott leszálltam az ágyúgolyóval és mivel már mindent tudtam az ellenségről, be tudtuk venni a várat.
A két ágyúgolyó olyan közel repült egymáshoz, hogy Münchhausen könnyen átszállhatott egyikről a másikra, de nem ütköztek össze. Az első ágyúgolyó tömege m_1 = 40 kg, a másodiké m_2 = 60 kg, Münchhausené M = 80 kg. Az első ágyúgolyó sebessége v_1 = 15 m/s volt, a vízszintessel α_1 = 53,13° szöget zárt be, a második ágyúgolyó sebessége v_2 = 13 m/s volt, a vízszintessel α_2 = 22,62° szöget zárt be, a két ágyúgolyó árnyéka egy egyenesen mozgott. Az átszálláskor az első ágyúgolyó sebessége nem változott attól, hogy leszállt róla Münchhausen báró.
A vár alaprajza szabályos kör, sugara 50 m, a vár falai 20 m magasak.
Elhihetjük-e Münchhausen báró történetét?
Számoljuk ki
- a második ágyúgolyó sebességét, miután átszállt rá Münchhausen báró;
- hogy a várfalon kívül vagy belül ért földet az ágyúgolyó;
- mekkora volt az az erő, ami Münchhausen báróra hatott az átszálláskor!

3. A Mikulás kirakta az ajándékokat az ablakba, és utána leugrott a szánjára. Az ablak 10 m-rel volt magasabban, mint a szánja, az ablakból a vízszintessel 22,6°-os szöget bezáró v_0 = 6,5 m/s – os kezdősebességgel ugrott el. A szán nem volt befékezve, csúszni kezdett a havon.
A Mikulás tömege M = 200 kg, a szánjáé m = 1000 kg. A szán és a havas talaj közti súrlódási együttható μ = 0,005.
a. Milyen messze csúszik a Mikulás a szánjával?
b. Mennyi a Mikulás + szán rendszer mechanikai energiája
- a Mikulás elugrásakor,
- a Mikulás szánhoz érkezésekor,
- a Mikulás + szán rendszer elindulásakor?

c. Adjuk meg a megtett út függvényében a rendszer kinetikus energiáját!
A szán vízszintes sík terepen van, legyen ez a helyzeti energia zérus szintje.

4. Számítsuk ki a vízmolekula tömegközéppontját! A kötéshossz 95,8 pm, a kötésszög 104,45°.

ZH2 2003. dec. 5. megoldások:

1.a) d$\mathbf{r}$ = ($\mathbf{i}$ – 3 $\mathbf{j}$ + 2t $\mathbf{k}$) dt , t_0 = -2, t_1 = 3, W = ... = 100 J
b) $\partial E_x/\partial z = \partial E_z/\partial x \Rightarrow a = 2$
c) $U = x^2y + 2xz + 5z$

2. Az átszállás pillanatára impulzus-megmaradást írhatunk fel.
Az első ágyúgolyót ki is hagyhatjuk, mert sebessége (és így impulzusa) nem változik,
Münchhausen v_{1x} = 9 m/s, v_{1z} = 12 m/s,
a másik ágyúgolyó v_{2x} = -12 m/s, v_{2z} = 5 m/s, így
$Mv_{1x} + m_2v_{2x} = (M+m_2)\, v_x \Rightarrow v_x = 0$
$\Rightarrow$ Münchhausen az ágyúgolyón függőlegesen mozog csak, azaz a vár kellős közepébe fog leesni!
$Mv_{1z} + m_2v_{2z} = (M+m_2)\, v_z \Rightarrow v_z = 9$ m/s
A Münchhausenre ható erő a sebességének megváltozása miatt:
$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{I}} = M\Delta\mathbf{v} / \Delta t = 80\,[9\mathbf{k} – (9\mathbf{i}+12\mathbf{k})] / 0{,}01 = – 24000\,(3\mathbf{i}+\mathbf{k})$ N, $|\mathbf{F}| \approx 76$ kN
(ez kb. 95g gyorsulásnak felel meg...)

3.a) Mikulás vízszintes sebessége $v_x = v_0 \cos\alpha = 6$ m/s = konst.,
tökéletesen rugalmatlanul ütközik a szánjával, de csak a vízszintes sebessége számít, mert a szánba huppanva úgy fog mozogni:
$Mv_x = (M+m)V \Rightarrow V = 1$ m/s sebességgel indul el,
majd a súrlódás miatt megáll, munkatétellel $d = V^2/2\mu g = 10$ m.
b) Elugráskor a Mikulás helyzeti + mozgási energiája $E_0 = MgH + ½Mv_0^2 = 24225$ J;
a szánhoz érkezéskor ugyanennyi (mert itt nincs se közegellenállás, se súrlódás);
a szán elindulásakor $E_1 = ½(M+m)V^2 = 600$ J (a többi a deformációs munkára fordítódott, hővé vált,...)
c) Munkatételből $E_{kin} = ½(M+m)V^2 – \mu(M+m)g \cdot s = 600 – 60\, s$ [J]

4. A H atomokat összekötő felező merőlegesen az O atomtól 6,5 pm-re.

ZH 2 2002. december 6.

1. A Mikulás (m_M = 150 kg) éppen rakodik a szánjára. 10 m magasan rögzített, m_{cs} = 10 kg tömegű, R = 20 cm sugarú súrlódásmentesen forgó csigán átvetett súlytalan, nyújthatatlan kötéllel már 8 m magasra húzott fel egy m_{zs} = 40 kg tömegű zsákot, amikor telefonhoz hívták. Átadja a kötél végét a krampuszának, aki viszont csak m_k = 30 kg tömegű. Mekkora gyorsulással rántja fel a kötél a krampuszt? Mekkora az impulzusa a zsáknak földetéréskor, ha a kötél átadásakor 1 m/s felfelé irányuló sebessége volt?

2. A Mikulás motoros szánkójával viharba keveredett Izland fölött átrepülve. A szánjára ható erőt a következő alakban adhatjuk meg:

$$\mathbf{F} = (2z - x)\,\mathbf{i} - 3y^2\,\mathbf{j} - 2yz\,\mathbf{k}$$

Mekkora munkát végez a szán motorja, amíg a Mikulás eljut
a P_0 (4,3,1) pontból a P_1 (4,1,2) pontba
- a két pontot összekötő egyenes mentén?
- úgy, hogy először függőlegesen leereszkedik a földre (z=0), ott elmegy a végpont alatti pontig a lehető legrövidebb úton, és ott függőlegesen felszáll?

3. A Mikulás bepörgött, vízszintesen kitárt karral piruettezni kezdett a jégen. Mennyire változik meg a szögsebessége, ha a karjait továbbra is vízszintesen tartva könyökben vízszintesen visszahajtja?
A Mikulás homogén, tömege 150 kg. Törzsét + lábait + nagykabátját tekintsük 16 cm sugarú, 150 cm magas hengernek, fejét egy ezen levő 12 cm sugarú gömbnek, karjait a henger tetejénél annak szélétől kiinduló 5 cm sugarú, 60 cm hosszú hengereknek. A Mikulás könyöke a karja közepénél van. Kinyújtott karral a szögsebessége 12 s^{-1}.

4. Hol van a kitárt karral piruettező Mikulás tömegközéppontja?
Maximum mekkora tömegű zsákot vehet a hátára a piruettezést abbahagyó (álló, nem forgó) Mikulás, ha zsákjának tömegközéppontja a földhöz képest 120 cm magasan, a törzs-hengerétől 20 cm távolságban van?

ZH2 2002. dec. 6. megoldások:

1. a zsák gyorsul lefelé: $m_{zs}a = m_{zs}g - K_1$,
a krampusz felfelé: $m_k a = K_2 - m_k g$,
a kötélerők különbsége forgatja a csigát: $(K_1 - K_2)\,R = \Theta\beta = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a/R$
$\Rightarrow$ $a = 2/15\ g = 4/3\ m/s^2$
Ezzel $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = t - 2/3t^2 = -8$ m $\Rightarrow$ $t = 4{,}29$ s $\Rightarrow$ $v = v_0 - at = 4{,}73$ m/s, $\mathbf{I} = -189\mathbf{k}$ kgm/s

2.a) $\mathbf{r}(t) = 4\,\mathbf{i} + (3-2t)\,\mathbf{j} + (1+t)\,\mathbf{k}$, $d\mathbf{r}(t) = (-2\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k})\,dt$, $t_0=0$, $t_1=1$, W = ... = 20,3 J
b) W = 3 + 27 – 4 = 25 J

3. $V_{törzs} = 0{,}1206\ m^3$, $V_{fej} = 0{,}0072\ m^3$, $V_{kar} = 0{,}0047\ m^3$,
$\Sigma V = V_{törzs} + V_{fej} + 2\,V_{kar} = 0{,}1373\ m^3$ $\Rightarrow$ $\rho = M / \Sigma V = 1092{,}5\ kg/m^3$
$\Rightarrow$ $M_{törzs} = 131{,}8$ kg, $\Theta_{törzs} = 1{,}687\ kgm^2$,
$M_{fej} = 7{,}9$ kg, $\Theta_{fej} = 0{,}0455\ kgm^2$,
$M_{kar} = 5{,}15$ kg, $\Theta_{kar} = 1{,}244\ kgm^2$ Steiner-tétellel!, kinyújtott állapotban,
behajlított állapotban $\Theta_{félkar} = 0{,}267\ kgm^2$.
Kinyújtott karral $\Theta_{össz,1} = 4{,}22\ kgm^2$, behajlított karral $\Theta_{össz,2} = 2{,}8\ kgm^2$.
Csak belső erő hat a karjának behajlításakor, impulzusmomentum-megmaradással
$\Theta_{össz,1}\,\omega_1 = \Theta_{össz,2}\,\omega_2$ $\Rightarrow$ $\omega_2 = 18$ m/s

4. $z_{törzs} = 0{,}75$ m, $z_{kar} = 1{,}45$ m, $z_{fej} = 1{,}62$ m, $\Rightarrow$ $z_s = 0{,}844$ m magasan van a tkp-ja.
$0{,}36\ m_{zsák} / (150 + m_{zsák}) \le 0{,}16$ $\Rightarrow$ $m_{zsák} \le 120$ kg.

ZH2 2002. december 4.

1. Adott a térerősség a következő alakban:

$$\mathbf{E} = (pxz + 2/y)\,\mathbf{i} - q\,x/y^2\,\mathbf{j} + (x^2 - r)\,\mathbf{k} \qquad p, q, r \text{ paraméterek}$$

a. Mekkora munkát végez az erőtér $p = q = 1$, $r = 4$ esetén, ha egy $m = 8$ kg tömegű testet mozgat a P_0 (2,4,6) pontból a P_1 (2,1,0) pontba a két pontot összekötő egyenes mentén?
b. A p, q, r paraméterek mely értékeire potenciálos az erőtér? Adjuk is meg a potenciálfüggvényt!

2. Mikulás és segédei az utcán járva-kelve dobálják fel a mikuláscsomagokat az ablakokba. Két csomag összeütközött $h = 3{,}2$ m magasan: szembetalálkozott egy $m_1 = 1{,}5$ kg tömegű, a vízszintessel $\alpha_1 = 30°$-os szöget bezáró, az x tengely pozitív irányában mozgó $v_1 = 6$ m/s sebességű csomag egy $m_2 = 1$ kg tömegű, a vízszintessel $\alpha_2 = 10°$-os szöget bezáró, az x tengely negatív irányában mozgó $v_2 = 10$ m/s sebességű csomaggal.
Határozzuk meg a két csomagból álló rendszer
→ impulzusát és
→ mechanikai energiáját
az ütközés előtt ill. az ütközés után, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlannak ill. rugalmasnak tekinthető!

3. Olyan dobókockát akarunk készíteni, amivel a várhatónál gyakrabban dobunk 6-ost: azt szeretnénk, hogy a 16 mm-es kocka súlypontja ne a geometriai középpontjában legyen, hanem 1 mm-rel eltolva az egyik lapja felé. A kockát alumíniumból és vasból akarjuk elkészíteni két négyzetes hasáb összeragasztásával. Mekkora legyen az alumíniumból ill. a vasból levő hasáb magassága? ($\rho_{Al} = 2700$ kg/m^3, $\rho_{Fe} = 7800$ kg/m^3)

4. M tömegű, L hosszúságú vízszintes helyzetű vékony rúd a végétől L/6 távolságra átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A rúd tengelytől távolabbi végpontjához alulról hozzádobunk egy m tömegű golyót függőleges v sebességgel. A golyó hozzáragad a rúdhoz, az ütközés tökéletesen rugalmatlannak tekinthető.
Legalább mekkorának kell lenni a v sebességnek, hogy a rúd a hozzáragadt golyóval átforduljon a függőleges helyzeten?
$M = 5$ kg, $L = 2{,}4$ m, $m = 1$ kg

ZH2 2002. dec. 4. megoldások:

1.a) $\mathbf{r}(t) = 2\,\mathbf{i} + (4–3t)\,\mathbf{j} + (6–6t)\,\mathbf{k}$, $d\mathbf{r}(t) = (–3\,\mathbf{j} –6\,\mathbf{k})\,dt$, $t_0=0$, $t_1=1$, W = ... = 12 J
b) $\partial E_x/\partial z = \partial E_z/\partial x \Rightarrow p = 2$
$\partial E_x/\partial y = \partial E_y/\partial x \Rightarrow q = 2$
$\partial E_y/\partial z = \partial E_z/\partial y \Rightarrow$ r tetszőleges
$U = – x^2z – 2x/y + rz$

2. Ütközés előtt a két csomag impulzusának összege
$\mathbf{I} = (m_1v_1\cos\alpha_1+m_2v_2\cos\alpha_2)\mathbf{i} + (m_1v_1\sin\alpha_1+m_2v_2\sin\alpha_2)\mathbf{k} = –2{,}054\mathbf{i} + 6{,}236\mathbf{k}$ [kgm/s] = konst.,
és ennyi ütközés után is, bármilyen ütközést feltételezünk.
$E_{mech} = m_1gh + ½m_1v_1^2 + m_2gh + ½m_2v_2^2 = 157$ [J], és ennyi tökéletesen rugalmas ütközés után is.
Tökéletesen rugalmatlan ütközést feltételezve ütközés után a közös sebesség
$\mathbf{v}=\mathbf{I}/(m_1+m_2)= –0{,}8216\mathbf{i}+2{,}4944\mathbf{k}$ [m/s], v=2,626 m/s, így $E_{mech} = (m_1+m_2)gh + ½(m_1+m_2)v^2 = 88{,}6$ J

3. Az x tengely mentén 0-tól (1,6–x) cm-ig Al,
ennek tömege $m_{Al} = \rho_{Al}\,(1{,}6–x)\cdot 1{,}6^2$, tömegközéppontja $x_{Al} = (1{,}6–x)/2$ cm;
(1,6–x) cm-től 1,6 cm-ig Fe, $m_{Fe} = \rho_{Fe}\,x\cdot 1{,}6^2$, tömegközéppontja $x_{Fe} = 1{,}6– x/2$ cm.
$x_s = (m_{Al}x_{Al}+m_{Fe}x_{Fe})/\,(m_{Al}+m_{Fe}) = 0{,}9$ cm $\Rightarrow$ x = 1,266 cm ill. x = 0,134 cm legyen a Fe magassága

4. A rúd Θ-ja az adott tengelyre $\Theta_{rúd} = \Theta_S + M\cdot(L/3)^2 = 1/12\,ML^2 + M\cdot(L/3)^2 = 7/36\,ML^2 = 5{,}6$ kgm^2,
ha ehhez hozzátapad a golyó, $\Theta = \Theta_{rúd} + m\cdot\,(5L/6)^2 = 9{,}6$ kgm^2.
Impulzusmomentum-megmaradás: a golyó ütközés előtti impulzusának a majdani forgástengelyre vett momentuma = a forogni kezdő rúd+golyó rendszer impulzusmomentumával:

$$mv \cdot 5L/6 = \Theta\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = v/4{,}8\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Átfordul, ha $½\,\Theta\omega^2 = 5v^2/24 \geq \Delta E_{pot} = L/3\cdot Mg + 5L/6\cdot mg = 60$ J $\Rightarrow v \geq 17$ m/s.

ZH2 2001. április 24.

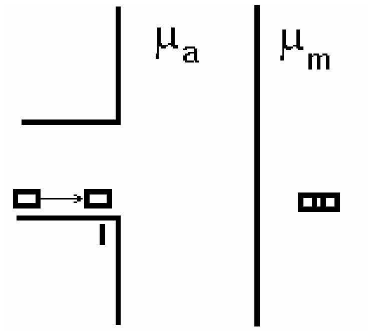
1. Adott a következő erőtér:

$\mathbf{E} = - 2 (xy + z)\, \mathbf{i} - x^2\, \mathbf{j} - (ax + 5)\, \mathbf{k}$

a. a = 4 esetén mennyi munkát végez az erőtér, ha egy m = 3 kg tömegű testet mozgat a P_1 (0,6,5) pontból a P_2 (5,-9,10) pontba az $\mathbf{r}(t) = (t+2)\, \mathbf{i} - 3t\, \mathbf{j} + (t^2+1)\, \mathbf{k}$ görbe mentén?
b. Hogyan kell megválasztani az „a" paraméter értékét, hogy legyen a fenti erőtérnek potenciálja?
c. Számoljuk ki ennél a paraméternél a potenciált!

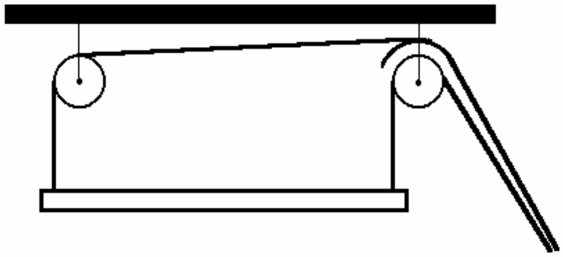
2. Egy útkereszteződésben a STOP táblánál álló Opelbe hátulról beleütközik egy másik Opel. A két autó összetapadt roncsként az ütközés helyétől 18 m-re áll meg a 8 m széles főút túloldalán levő mezőn. A szabálytalankodó kocsi 11,4 m-es féknyomot hagyott az ütközés előtt. Mekkora sebességgel haladt, mielőtt fékezni kezdett?

A súrlódási együttható az aszfalton $\mu_a = 0,4$,
a mezőn pedig $\mu_m = 0,5$.



3. Milyen magasan van egy olyan süvegcukor tömegközéppontja, melynek alakja forgási paraboloid: az $y = 18 - 3x^2$ [cm] parabola y tengely körüli forgatásával nyerhető, alapjának sugara $\sqrt{6}$ cm, és sűrűsége $\rho = 1,06$ g/cm^3 ?
Mennyi a süvegcukor tömege?

4. Az ábra szerint felfüggesztett fregoli köteleit rögzítő kampó egyszer csak kijön a falból. Milyen sebességgel és mennyi idő alatt ér földet az M = 7,5 kg tömegű fregoli, ha a csigák tömege
a. elhanyagolható,
b. $m_{cs} = 0,5$ kg?
A fregoli eredetileg 3 m magasan volt. (A bal oldali kötél a jobb oldali csigán nincs átvetve, hanem fölötte súrlódásmentesen csúszik egy védőburkon.)



ZH2   2002. dec. 4. megoldások:

1. ld. 2003. dec. 5. / 1. feladat

2. órán volt

3.
Az y tengelyre merőlegesen korongokra feldarabolva
$dV = [r(y)]^2\pi\, dy = x^2\pi\, dy = (18-y)\pi/3\, dy = (6-y/3)\pi\, dy$

$$M = \int_0^{18} 1{,}06(6 - y/3)\pi\, dy \approx 180\text{ g}$$

$$y_s = 1/M \int_0^{18} 1{,}06y(6 - y/3)\pi\, dy = 6\text{ cm}$$

4. egyenletes gyorsulás esetén, ha $v_0=0$, akkor $s = ½ at^2 \Rightarrow t = \sqrt{2s/a}$, $v = at$
a) ez szabadesés: $a_1 = g$, $t_1 = 0{,}77$ s alatt ér földet, $v_1 = 7{,}75$ m/s.
b) a fregolira $Ma = Mg - K_1 - K_2$
a csigákra $K_1 r = \Theta_1\beta_1 = ½ m_{cs}r^2 \cdot a/r$, $K_2 r = \Theta_2\beta_2 = ½ m_{cs}r^2 \cdot a/r$
$\Rightarrow$ $a_2 = 15/16\, g \approx 9{,}375$ m/s^2, ezzel $t_2 = 0{,}8$ s alatt ér földet, $v_2 = 7{,}5$ m/s